Énoncés

Exercice 1

Cocher la ou les catégories auxquelles appartiennent chacun des nombres donnés.

	Entier naturel	Entier relatif	Nbre décimal	Nbre rationnel
-5				
1				
2/3				
-3/10				

Exercice 2

a] Déterminer tous les diviseurs de 72.
b] Déterminer tous les diviseurs de 136.
c] En déduire les diviseurs communs à 72 et 136.

Exercice 3

Déterminer les diviseurs communs à 75 et 180 puis le PGCD de ces deux nombres.

Exercice 4

Déterminer si les couples d'entiers suivants sont premiers entre eux :

a] 135 et 120

b] 46 et 124

c] 114 et 63

d] 273 et 41

Exercice 5

a] Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers : 36 ; 80 ; 90 ; 93.

b] Compléter le tableau de PGCD suivant :

PGCD de … et …	36	80	90	93
36				
80				
90				
93				

Exercice 6

Entourer la ou les bonnes réponses :

Si k est un entier et que $n = 18\times k$ alors...	n est un multiple de 6	12 est un diviseur de n	18 est un multiple de k	PGCD(n ; k) = 18
Si la division euclidienne de a par b est $a = b\times c + d$ alors ...	PGCD(a;c) = PGCD(b; d)	PGCD(a;b) = PGCD(b; d)	$b < d$	$d < b$
Si n et m sont des entiers tels que n divise m alors...	PGCD(m;n) = m	PGCD(m;n) = n	PGCD(m;m) = m	PGCD(1;n) = n

Exercice 7

1. Déterminer si le nombre 943 est premier, en précisant la démarche adoptée.

2. Déterminer sans utiliser la calculatrice le PGCD de 943 et 9^{43}.

Exercice 8

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers du nombre 2600.

2. Ysarn n'a utilisé sa calculatrice qu'une seule fois pour savoir que 2600 et 54713 sont premiers entre eux. Comment a-t-il raisonné ?

Exercice 9

Calculer le PGCD de 2 640 et 34 545 à l'aide de la méthode des divisions successives.

Exercice 10

a] Calculer le PGCD de 1078 et 322 à l'aide de la méthode des divisions successives.

b] Un confiseur dispose de 1078 anis et 322 dragées. Quelle exploitation concrète de la question précédente peut-il faire ?

Exercice 11

Un artisan souhaite recouvrir une terrasse rectangulaire de 4,8 m de large et de 5,6 m de long à l'aide de dalles carrées identiques sans faire de découpe. Quelle sera la taille maximale, en nombre entier de cm, des dalles ? Combien de dalles seront nécessaires ?

Exercice 12

Démontrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.

Exercice 13

Démontrer que la différence de deux entiers naturels ayant le même reste dans la division euclidienne par n est un multiple de n.

Exercice 14

La somme de quatre multiples consécutifs de 11 est égale à 1078. Quels sont ces quatre entiers ?

Exercice 15

Démontrer que si un entier n est impair alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 16

Calculer le PGCD de 1204 et 258 puis rendre la fraction $\dfrac{1204}{258}$ irréductible.

Exercice 17

Soit n un entier naturel. Démontrer que le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 18

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$J = \dfrac{72}{175} \div \dfrac{54}{105}$

$K = \dfrac{51}{21} \div \dfrac{68}{7}$

$L = \dfrac{40}{48} + \dfrac{105}{27} \times \dfrac{90}{56}$

$M = \left(-\dfrac{12}{14} + \dfrac{20}{15}\right) \times \dfrac{98}{25}$

$N = -\dfrac{14}{30} + \dfrac{10}{30} \times \dfrac{28}{8}$

Exercice 19

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible : $P = \dfrac{25}{18} - \left(-\dfrac{5}{14} + \dfrac{8}{21}\right) \div \dfrac{9}{7}$

Exercice 20

Démontrer que, pour tout nombre entier strictement positif n, les nombres n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Corrigés

Exercice 1

	Entier naturel	Entier relatif	Nbre décimal	Nbre rationnel
-5		**X**	**X**	**X**
1	**X**	**X**	**X**	**X**
2/3				**X**
-3/10			**X**	**X**

Exercice 2

a] Les diviseurs de 72 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 et 72.
b] Les diviseurs de 136 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 17 ; 34 ; 68 et 136.
c] Les diviseurs communs à 72 et 136 sont donc : 1 ; 2 ; 4 et 8.

Exercice 3

Les diviseurs de 75 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 25 et 75.
Les diviseurs de 180 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20 ; 30 ; 36 ; 45 ; 60 ; 90 et 180.
Les diviseurs communs à 75 et 180 sont donc 1 ; 3 ; 5 et 15. Donc PGCD (75 ; 180) = 15.

Exercice 4

a] Comme un entier dont le chiffre des unités est 0 ou 5 est divisible par 5 alors 5 est un diviseur commun à 135 et 120.
Donc **135 et 120 ne sont pas premiers entre eux**.

b] Si le chiffre des unités d'un nombre est 0, 2, 4, 6 ou 8 alors ce nombre est divisible par 2.
Par conséquent, 2 est un diviseur commun à 46 et 124. Ainsi **46 et 124 ne sont pas premiers entre eux**.

c] $1 + 1 + 4 = 6$ et 6 est divisible par 3 donc 114 est divisible par 3.
$6 + 3 = 9$ et 9 est divisible par 3 donc 63 est divisible par 3.
Comme 3 est un diviseur commun à 114 et 63 alors **114 et 63 ne sont pas premiers entre eux**.

d] Comme 41 est un nombre premier et que 273 n'est pas un multiple de 41 alors **41 et 273 sont premiers entre eux**.

Exercice 5

a] On a $36 = 2^2 \times 3^2$
$80 = 2^4 \times 5$
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
$93 = 3 \times 31$

b]

PGCD de … et …	36	80	90	93
36	**36**	**4**	**18**	**3**
80	**4**	**80**	**10**	**1**
90	**18**	**10**	**90**	**3**
93	**3**	**1**	**3**	**93**

Exercice 6

Si k est un entier et que $n = 18\times k$ alors...	***n* est un multiple de 6**	12 est un diviseur de n	18 est un multiple de k	PGCD(n ; k) = 18
Si la division euclidienne de a par b est $a = b\times c + d$ alors ...	PGCD(a;c) = PGCD(b; d)	**PGCD(a;b) = PGCD(b; d)**	$b < d$	**$d < b$**
Si n et m sont des entiers tels que n divise m alors...	PGCD(m;n) = m	**PGCD(m;n) = n**	**PGCD(m;m) = m**	PGCD(1;n) = n

Exercice 7

1. On divise 943 par tous les nombres premiers en partant de 2 pour savoir si le quotient est entier.
On constate alors que 943 = 23×41 donc **943 n'est pas premier**.

2. Le seul nombre premier qui divise le nombre 9^{43} est 3.
Comme 3 n'est pas un diviseur de 943 alors **le PGCD de 943 et 9^{43} est 1**.

Exercice 8

1. On a 2600 = 26×100 donc 2600 = 2×13×10×10 d'où **2600 = $2^3\times5^2\times13$**.

2. Ysarn a vu que 54713 n'était divisible ni par 2 ni par 5. Il lui a suffi de taper 54713:13 sur sa calculatrice pour voir que 54713 n'est pas divisible par 13 et que par conséquent **2600 et 54713 sont premiers entre eux**.

Exercice 9

On calcule le PGCD de 2 640 et 34 545 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

34 545 = 2 640×13 + 225 donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (2 640 ; 225).
2 640 = 225×11 + 165 donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (225 ; 165).
225 = 165×1 + 60 donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (165 ; 60).
165 = 60×2 + 45 donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (60 ; 45).
60 = 45×1 + 15 donc PGCD (2 640 ; 34 545) = PGCD (45 ; 15).
45 = 15×3 + 0 donc PGCD (45 ; 15) = 15.

On a alors **PGCD (2 640 ; 34 545) = 15**.

Exercice 10

a] On applique l'algorithme d'Euclide :

1 078 = 322 × 3 + 112
322 = 112 × 2 + 98
112 = 98 × 1 + 14
98 = 14 × 7

On en déduit que **PGCD(1 078 ; 322) = 14**.

b] Grâce à la question précédente, le confiseur sait qu'il pourra, au maximum, constituer **14 sachets** identiques contenant un mélange de dragées et d'anis. Plus précisément : **77 anis et 23 dragées**.

Exercice 11

On a 4,8 m = 480 cm et 5,6 m = 560 cm. Calculons alors le PGCD de 480 et 560 :

$560 = 480 + 80$
$480 = 80 \times 6 + 0$

On a donc PGCD(560 ; 480) = 80. Il s'agit du nombre entier le plus grand divisant à la fois 480 et 560, par conséquent l'artisan doit choisir des dalles de **80 cm de côté**.

Le dallage formera alors un rectangle de 560:80 = 7 dalles sur 480:80 = 6 dalles.
Par conséquent, 7×6 = **42 dalles** seront nécessaires.

Exercice 12

L'écriture littérale d'un entier naturel impair est $2n+1$.
Il faut ajouter 2 à un entier naturel impair pour obtenir l'entier impair qui le suit donc $2n+1+2=2n+3$ est le suivant.

La somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est donc de la forme $2n+1+2n+3=4n+4$.

Comme $4n+4 = 4(n+1)$ alors **la somme de deux nombres impairs consécutifs est bien un multiple de 4**.

Exercice 13

Soient a et b deux entiers naturels ayant le même reste r dans la division euclidienne par n. On a : $a = qn + r$ et $b = pn + r$.

D'où
$$a - b = (qn + r) - (pn + r)$$
$$a - b = qn + r - pn - r$$
$$a - b = (q - p)n$$

La différence entre *a* et *b* est bien divisible par *n*.

Exercice 14

Soient quatre multiples consécutifs de 11. Il existe un nombre entier n tel qu'ils s'écrivent $11n$; $11(n + 1)$; $11(n + 2)$; $11(n + 3)$.

Cherchons n tel que :
$$11n + 11(n + 1) + 11(n + 2) + 11(n + 3) = 1078$$
$$11(n + n + 1 + n + 2 + n + 3) = 1078$$
$$11(4n + 6) = 1078$$
$$4n + 6 = 98$$
$$4n = 92$$
$$n = 23$$

Le premier des quatre entiers cherchés est 23×11 = 253.
Les quatre entiers cherchés sont donc **253 ; 264 ; 275 et 286**.

Exercice 15

Comme n est impair alors il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

On a :
$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2p + 1)^2 - 1 \\ &= (2p + 1)(2p + 1) - 1 \\ &= 4p^2 + 2p + 2p + 1 - 1 \\ &= 4p(p + 1) \end{aligned}$$

Comme p et $p + 1$ sont des entiers consécutifs alors l'un d'eux est pair et le produit $p(p + 1)$ est un multiple de 2.
Par conséquent $4p(p + 1)$ est un multiple de 8.

Donc si un entier n est impair alors **$n^2 - 1$ est un multiple de 8**.

Exercice 16

Calcul du PGCD de 1 204 et 258 par l'algorithme d'Euclide :

1 204 = 4 × 258 + 172
258 = 1 × 172 + 86
172 = 2 × 86.
Donc PGCD(1204 ; 258) = 86

On divise alors le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1204}{258}$ par 86 de façon à la rendre irréductible : $\frac{1204}{258} = \mathbf{\frac{14}{3}}$.

Exercice 17

On a $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2\times2^n + 2^2\times2^n$
$= 2^n\,(1+2+4)$
$= 2^n \times 7$

Par conséquent $\mathbf{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}}$ **est divisible par 7**.

Exercice 18

$J = \frac{72}{175} \div \frac{54}{105}$
$J = \frac{72}{175} \times \frac{105}{54}$
$J = \frac{4\times18\times35\times3}{35\times5\times18\times3}$
$\mathbf{J = \frac{4}{5}}$

$K = \frac{51}{21} \div \frac{68}{7}$
$K = \frac{51}{21} \times \frac{7}{68}$
$K = \frac{17\times3\times7}{7\times3\times17\times4}$
$\mathbf{K = \frac{1}{4}}$

$L = \frac{40}{48} + \frac{105}{27} \times \frac{90}{56}$
$L = \frac{5}{6} + \frac{5\times7\times3\times9\times5\times2}{9\times3\times7\times2\times4}$
$L = \frac{5}{6} + \frac{25}{4}$
$L = \frac{10}{12} + \frac{75}{12}$
$\mathbf{L = \frac{85}{12}}$

$M = \left(-\frac{6}{7} + \frac{4}{3}\right) \times \frac{98}{25}$
$M = \left(-\frac{18}{21} + \frac{28}{21}\right) \times \frac{98}{25}$
$M = \frac{10}{21} \times \frac{98}{25}$
$M = \frac{5\times2\times14\times7}{7\times3\times5\times5}$
$\mathbf{M = \frac{28}{15}}$

$N = -\frac{14}{30} + \frac{10}{30} \times \frac{28}{8}$
$N = -\frac{14}{30} + \frac{10\times7\times4}{3\times10\times2\times4}$
$N = -\frac{14}{30} + \frac{7}{6}$
$N = \frac{21}{30}$
$\mathbf{N = \frac{7}{10}}$

Exercice 19

$P = \frac{25}{18} - \left(-\frac{5}{14} + \frac{8}{21}\right) \div \frac{9}{7}$
$P = \frac{25}{18} - \left(-\frac{15}{42} + \frac{16}{42}\right) \times \frac{7}{9}$
$P = \frac{25}{18} - \frac{1}{42} \times \frac{7}{9}$
$P = \frac{25}{18} - \frac{1}{54}$
$P = \frac{74}{54}$
$\mathbf{P = \frac{37}{27}}$

Exercice 20

Soit p un entier strictement supérieur à 1 qui divise n.

Cherchons si p divise aussi $2n + 1$. On a $\frac{2n+1}{p}=2\frac{n}{p}+\frac{1}{p}$.

Comme p divise n alors $\frac{n}{p}$ est entier mais $\frac{1}{p}$ n'est pas entier donc $2\frac{n}{p}+\frac{1}{p}$ non plus.
Par conséquent $(2n + 1)$ n'est pas divisible par p.

On ne peut pas trouver de diviseur commun à n et $(2n +1)$ donc **ces nombres sont premiers entre eux**.