Exercices de 3ème – Chapitre 6 – Trigonométrie

Énoncés

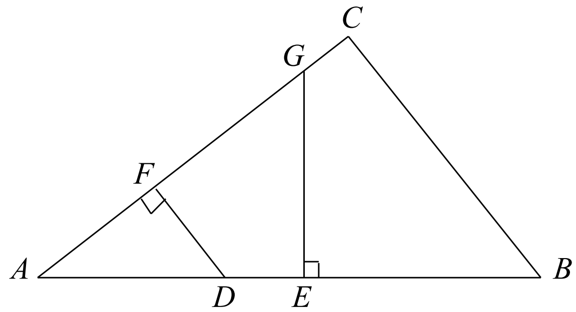
Exercice 1

Compléter les phrases suivantes.

a] Dans un triangle ABC rectangle en A, l'hypoténuse est …, le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ est ....et le côté adjacent à $\widehat{ACB}$ est ....
b] Dans un triangle DEF rectangle en E, l'hypoténuse est …, le côté opposé à $\widehat{EDF}$ est ....et le côté opposé à $\widehat{EFD}$ est ....
c] Dans un triangle GHI rectangle en H, l'hypoténuse est …, le côté adjacent à $\widehat{HIG}$ est ....et le côté opposé à $\widehat{HGI}$ est ....

Exercice 2

Compléter les phrases suivantes quand c'est possible.



a] L'hypoténuse du triangle ABC est ...
b] L'hypoténuse du triangle AEG est …
c] Dans le triangle EGA, le côté opposé à $\widehat{EGA}$ est ....
d] Dans le triangle ABC, le côté adjacent à $\widehat{BAC}$ est ....
e] Dans le triangle AEG, le côté adjacent à $\widehat{AEG}$ est ....
f] Dans le triangle ADF, le côté adjacent à $\widehat{DAF}$ est ....
g] Dans le triangle BEG, le côté opposé à $\widehat{EGB}$ est ....

Exercice 3

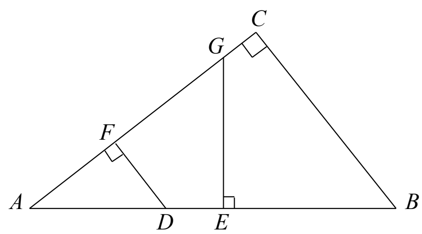
Compléter les phrases suivantes :

a] « Dans le triangle TUV rectangle en V, l'hypoténuse est … , la tangente de $\widehat{TUV}$ vaut … et le … de l'angle $\widehat{TUV}$ vaut $\frac{TV}{TU}$. »

b] « Dans le triangle ... rectangle en ..., on a $\tan(\widehat{HJK}) = \frac{HK}{KJ}$. »

Exercice 4

On considère la figure ci-contre.



1. Exprimer de trois manières différentes ce que vaut $\sin(\widehat{CAD})$.

2. Démontrer que $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AG}$.

Exercice 5

À l'aide de la calculatrice, donner la valeur des sinus et des tangentes des angles donnés, arrondies au centième.

Angle	30°	45°	20°	83°	60°
Sinus					
Tangente					

Exercice 6

À l'aide de la calculatrice, calculer la valeur arrondie au degré de la mesure des angles.

Sinus	0,4	0,9	1,1
Angle			

Tangente	0,28	1	2,3
Angle			

Exercice 7

ABC est un triangle rectangle en *A*, *AB* = 5 cm et $\widehat{BCA}=35°$. Calculer la longueur *BC* arrondie au cm.

Exercice 8

MNP est un triangle rectangle en *M* tel que *PN* = 5,4 cm et $\widehat{MPN}=42°$. Calculer *MP* arrondie au millimètre.

Exercice 9

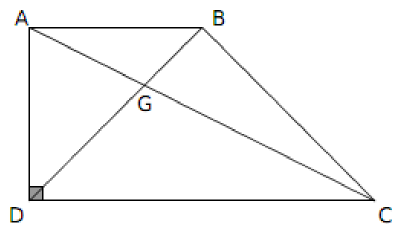
RST est un triangle rectangle en *S* tel que *RS* = 4 cm et ST = 7 cm. Calculer $\widehat{SRT}$ arrondi au centième de degré.

Exercice 10

1. Construire un triangle *ABC* rectangle en *A*, tel que *AC* = 5 cm et $\widehat{ABC}=40°$. Soit *H* le pied de la hauteur issue de *A*.
2. Calculer la longueur *AB* arrondie au millimètre.
3. Calculer la longueur *AH* arrondie au dixième de millimètre.

Exercice 11

ABCD est un trapèze rectangle de bases [*AB*] et [*CD*] avec *AB* = *AD* = 4,5 cm et *DC* = 6 cm.



1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$ arrondie au degré.
2. Calculer la longueur de la diagonale [*AC*].
3. Quelle est la nature du triangle *ABD* ? Justifier.
4. Calculer la longueur *BD* arrondie au millimètre.

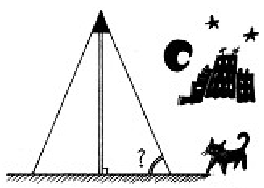
Exercice 12

1. Trouver à l'aide de la calculatrice l'écriture décimale de sin(30°) et en déduire la valeur exacte de cos(30°).
2. Déterminer la valeur exacte de tan(30°).
3. Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle *ABC* rectangle en *B* tel que *AB* = 8 cm et $\widehat{BAC}=30°$.

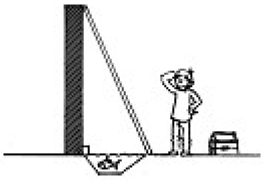
Exercice 13

Dans la nuit, un lampadaire de 2,60 m de haut, dessine sur le sol un disque de 95 cm de rayon.

Quelle est la mesure de l'angle, arrondie au degré, formé par le cône de lumière avec le sol ?



Exercice 14



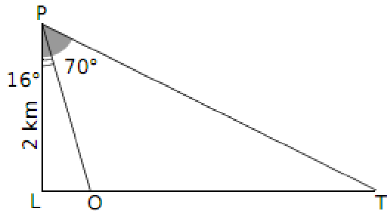
Pour effectuer une réparation sur un toit, Arnoul doit poser son échelle contre un mur.
Pour qu'elle soit suffisamment stable et pour éviter de glisser, l'échelle doit former un angle d'au moins 65° avec le sol.

1. L'échelle mesure 2,20 m. Gêné par un bassin à poissons rouges, Arnoul n'a pu poser son échelle qu'à 1,20 m du mur. Cette échelle sera-t-elle suffisamment stable ? Justifier.

2. À quelle distance maximum du mur en cm Arnoul doit-il placer son échelle pour qu'elle soit stable ?

Exercice 15

Aurea veut connaître la distance entre deux monuments placés en *O* et en *T* et alignés avec le point L.
Elle sait que $LP = 2$ km, que (LP) est perpendiculaire à (LT) et, par visée à partir du point *P*, elle a obtenu les mesures des angles $\widehat{LPO}$ et $\widehat{LPT}$.



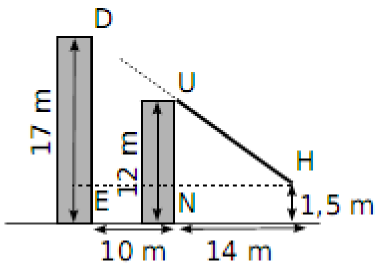
1. Exprimer *OT* en fonction de *LT* et *LO*.

2. Calculer *OT*.

Exercice 16

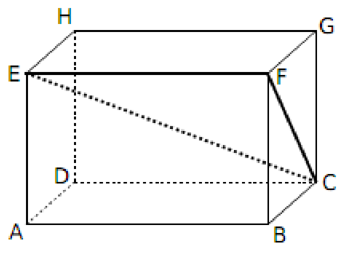
Deux immeubles distants de 10 m sont situés l'un derrière l'autre.
Le premier immeuble mesure 12 m. Eliam se trouve à 14 m du premier immeuble, ses yeux sont à 1,50 m du sol.

Peut-il voir l'immeuble qui mesure 17 m ?



Exercice 17

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que :
$AB = 10$ cm ; $BC = 4{,}8$ cm ; $GC = 6{,}4$ cm.



1. Calculer *FC*.
2. Quelle est la nature du triangle EFC ?
3. Donner l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{FCE}$.

Exercice 18

Soit un angle aigu $\hat{W}$ tel que $\cos(\hat{W}) = \frac{2}{7}$.

1. Déterminer les valeurs exactes de $\sin(\hat{W})$ et $\tan(\hat{W})$.
2. Construire $\hat{W}$ sans le calculer.

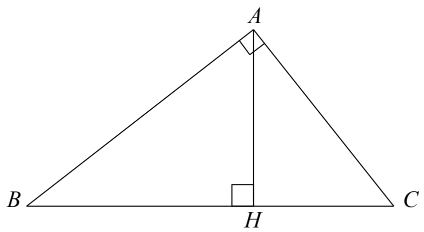
Exercice 19

Soit x un angle aigu.

a] Exprimer $\cos^2 x - \sin^2 x$ en fonction de $\cos^2 x$.
b] Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\tan^2 x$.

Exercice 20

On considère la figure ci-contre.



1. Justifier que les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{HAC}$ ont la même mesure.

2. Démontrer que $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{CH}{AH}$

3. Écrire AH^2 en fonction de BH et CH.

Corrigés

Exercice 1

a] Dans ABC rectangle en A, l'hypoténuse est **[BC]**, le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ est **[AB]** et le côté adjacent à $\widehat{ACB}$ est **[AC]**.
b] Dans DEF rectangle en E, l'hypoténuse est **[DF]**, le côté opposé à $\widehat{EDF}$ est **[EF]** et le côté opposé à $\widehat{EFD}$ est **[DE].**
c] Dans un triangle GHI rectangle en H, l'hypoténuse est **[GI]**, le côté adjacent à $\widehat{HIG}$ est **[HI]** et le côté opposé à $\widehat{HGI}$ est **[HI]**.

Exercice 2

a] Comme ABC n'est pas rectangle, alors on ne peut pas parler de son hypoténuse.
b] L'hypoténuse du triangle AEG est **[AG]**.
c] Dans le triangle EGA, le côté opposé à $\widehat{EGA}$ est **[AE]**.
d] Comme ABC n'est pas rectangle, alors on ne peut pas parler du côté adjacent à $\widehat{BAC}$.
e] Comme $\widehat{AEG}$ est l'angle droit du triangle AEG alors on ne peut pas parler de son côté adjacent.
f] Dans le triangle ADF, le côté adjacent à $\widehat{DAF}$ est **[AF]**.
g] Dans le triangle BEG, le côté opposé à $\widehat{EGB}$ est **[BE]**.

Exercice 3

a] « Dans TUV rectangle en V, l'hypoténuse est **[TU]**, la tangente de $\widehat{TUV}$ vaut $\boldsymbol{\frac{TV}{UV}}$ et le **sinus** de l'angle $\widehat{TUV}$ vaut $\frac{TV}{TU}$. »

b] « Dans le triangle ***HJK*** rectangle en ***K***, on a $\tan(\widehat{HJK})=\frac{HK}{KJ}$. »

Exercice 4

1. Dans le triangle FAD rectangle en F on a $\sin(\widehat{FAD})=\frac{DF}{AD}$ donc $\boldsymbol{\sin(\widehat{CAD})=\frac{DF}{AD}}$.

Dans le triangle AEG rectangle en E on a $\sin(\widehat{GAE})=\frac{EG}{AG}$ donc $\boldsymbol{\sin(\widehat{CAD})=\frac{EG}{AG}}$.

Dans le triangle ABC rectangle en C on a $\sin(\widehat{CAB})=\frac{BC}{AB}$ donc $\boldsymbol{\sin(\widehat{CAD})=\frac{BC}{AB}}$.

2. Dans le triangle FAD rectangle en F on a $\cos(\widehat{FAD})=\frac{AF}{AD}$ et dans le triangle AEG rectangle en E on a $\cos(\widehat{GAE})=\frac{AE}{AG}$.

Comme $\widehat{FAD}=\widehat{GAE}$ alors $\cos(\widehat{FAD})=\cos(\widehat{GAE})$ donc $\boldsymbol{\frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AG}}$.

Exercice 5

Angle	30°	45°	20°	83°	60°
Sinus	**0,5**	**0,71**	**0,34**	**0,99**	**0,87**
Tangente	**0,58**	**1**	**0,36**	**8,14**	**1,73**

Exercice 6

Sinus	0,4	0,9	1,1
Angle en degré	24	64	Impossible

Tangente	0,28	1	2,3
Angle en degré	16	45	67

Exercice 7

Comme ABC est un triangle rectangle en A, alors $\sin(\widehat{BCA})=\frac{AB}{BC}$ donc $\sin(35°)=\frac{5}{BC}$ d'où BC vaut $\frac{5}{\sin(35°)}\boldsymbol{\approx 9\text{ cm}}$.

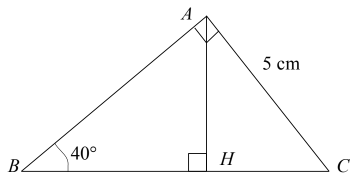
Exercice 8

Comme *MNP* est rectangle en *M,* alors $\cos(\widehat{MPN})=\dfrac{MP}{NP}$ donc $\cos(42°)=\dfrac{MP}{5{,}4}$ d'où *MP* vaut $5{,}4\times\cos(42°)\approx\mathbf{4{,}0\,cm}$.

Exercice 9

Comme *RST* est un triangle rectangle en *S*, alors $\tan(\widehat{SRT})=\dfrac{ST}{RT}$ donc $\tan(\widehat{SRT})=\dfrac{7}{4}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{SRT}\approx 60{,}26°}$.

Exercice 10



1. Voir ci-contre.

2. Comme *ABC* est un triangle rectangle en *A*, alors $\tan(\widehat{ABC})=\dfrac{AC}{AB}$ donc $\tan(40°)=\dfrac{5}{AB}$

d'où *AB* vaut $\dfrac{5}{\tan(40°)}\approx\mathbf{6{,}0\,cm}$.

3. Comme *ABH* rectangle en *H*, alors $\sin(\widehat{ABH})=\dfrac{AH}{AB}$ donc $AH=AB\sin(\widehat{ABH})$ d'où $AH=\dfrac{5\times\sin(40°)}{\tan(40°)}$ soit $\boldsymbol{AH\approx 3{,}83\,cm}$.

Exercice 11

1. Comme *ADC* est un triangle rectangle en *D*, alors $\tan(\widehat{ACD})=\dfrac{AD}{CD}$ donc $\tan(\widehat{ACD})=\dfrac{4{,}5}{6}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{ACD}\approx 37°}$.

2. Comme *ADC* est un triangle rectangle en *D*, alors $AC^2=AD^2+CD^2$ donc $AC^2=56{,}25$ soit $AC=\sqrt{56{,}25}$ et $\boldsymbol{AC=7{,}5\,cm}$.

3. Comme *ABCD* est un trapèze rectangle de bases [*AB*] et [*CD*] alors [*AB*] et [*CD*] sont parallèles.
Comme [*AB*] et [*CD*] sont parallèles avec [*CD*] perpendiculaire à [*AD*] alors [*AB*] est perpendiculaire à [*AD*].
Comme, en plus, $AB=AD$, alors le triangle ***ABD* est isocèle rectangle en *A***.

4. Comme le triangle *ABD* est rectangle en *A* alors $BD^2=AD^2+AB^2$ donc $BD^2=40{,}5$ donc $BD=\sqrt{40{,}5}$ soit $\boldsymbol{BD\approx 6{,}4\,cm}$

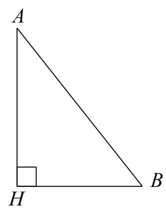
Exercice 12

1. On a sin(30°) = 0,5.
Comme (cos(30°))² + (sin(30°))² = 1 alors on a $(\cos(30°))^2=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ d'où $(\cos(30°))^2=\dfrac{3}{4}$. On a donc $\boldsymbol{\cos(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

2. On a $\tan(30°)=\dfrac{\sin(30°)}{\cos(30°)}$ d'où $\tan(30°)=\dfrac{1}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\tan(30°)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ soit $\tan(30°)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou encore $\boldsymbol{\tan(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

3. Comme *ABC* est rectangle en *B* alors $\tan(\widehat{BAC})=\dfrac{BC}{AB}$ d'où $BC=8\tan(30°)$ soit $BC=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
L'aire du triangle *ABC* rectangle en *B* vaut $\dfrac{1}{2}\times AB\times BC$ soit $\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\,cm^2}$.

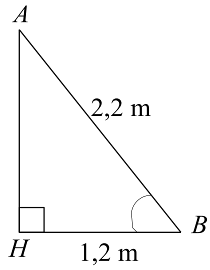
Exercice 13



En admettant que le lampadaire est perpendiculaire au sol, une coupe du cône de lumière forme le triangle rectangle ci-contre avec $AH=2{,}6$ et $BH=0{,}95$.

On a par conséquent $\tan(\widehat{ABH})=\dfrac{AH}{BH}$ soit $\tan(\widehat{ABH})=\dfrac{2{,}6}{0{,}95}$.
On en déduit que le cône de lumière forme un angle d'**environ 70°** avec le sol.

Exercice 14



1. On schématise la situation par le dessin ci-contre.

Comme *ABH* est un triangle rectangle en *H*, alors $\cos(\widehat{ABH})=\frac{BH}{AB}$ donc $\cos(\widehat{ABH})=\frac{1,2}{2,2}$ d'où $\widehat{ABH}\approx 57°$.

Par conséquent **l'échelle risque de glisser**.

2. Cherchons *BH* lorsque $\widehat{ABH}$ mesure 65° : on a $\cos(65°)=\frac{BH}{2,2}$ d'où $BH=2,2\cos(65°)$.

Par conséquent l'échelle doit être située à moins de **92 cm** du mur.

Exercice 15

1. Comme $O\in[TL]$ alors $\boldsymbol{OT=LT-LO}$.

2. Comme *LOP* est rectangle en *L*, alors $\tan(\widehat{LPO})=\frac{LO}{LP}$ donc $\tan(16°)=\frac{LO}{2}$ d'où $LO=2\tan(16°)$ km.

Comme *LTP* est rectangle en *L*, alors $\tan(\widehat{LPT})=\frac{TL}{LP}$ donc $\tan(16°+70°)=\frac{TL}{2}$ d'où $TL=2\tan(86°)$ km.

On a donc $\boldsymbol{OT=2\tan(86°)-2\tan(16°)}$ **km** soit environ 28 km.

Exercice 16

En admettant que les immeubles sont perpendiculaires au sol et que le regard d'Eliam est parallèle au sol, alors les triangles *DEH* et *UNH* sont rectangles respectivement en *E* et *N* avec *DE* = 17 – 1,5 donc <u>*DE* = 15,5m</u> et *UN* = 12 – 1,5 donc <u>*UN* = 10,5m</u>.

Comme *DEH* est un triangle rectangle en *E*, alors $\tan(\widehat{EHD})=\frac{ED}{EH}$ donc $\tan(\widehat{EHD})=\frac{15,5}{24}$ d'où $\widehat{EHD}\approx 32,9°$.

Comme *UNH* est un triangle rectangle en *N*, alors $\tan(\widehat{UHN})=\frac{UN}{NH}$ donc $\tan(\widehat{UHN})=\frac{10,5}{14}$ d'où $\widehat{UHN}\approx 36,9°$.

Comme $\widehat{EHD}<\widehat{UHN}$ alors **Eliam ne pourra pas voir le sommet** *D* du grand immeuble.

Exercice 17

1. Comme le triangle *FCB* est rectangle en B alors $FC^2=BC^2+FB^2$ donc $FC^2=4,8^2+6,4^2$ d'où **FC = 8 cm**.

2. Comme [*EF*] est perpendiculaire à la face *BCGF* du pavé alors ***EFC* est un triangle rectangle en *F*.**

3. Comme *EFC* est un triangle rectangle en *F*, alors $\tan(\widehat{FCE})=\frac{FE}{FC}$ donc $\tan(\widehat{FCE})=\frac{10}{8}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{FCE}\approx 51°}$.

Exercice 18

1. On a $\cos^2\hat{W}+\sin^2\hat{W}=1$ donc $\sin^2\hat{W}=1-\frac{4}{49}$ donc $\sin^2\hat{W}=\frac{45}{49}$ d'où $\sin\hat{W}=\frac{\sqrt{45}}{7}$ ou $\sin\hat{W}=-\frac{\sqrt{45}}{7}$.

Comme $\hat{W}$ est un angle aigu alors son sinus est positif d'où $\boldsymbol{\sin\hat{W}=\frac{\sqrt{45}}{7}}$.

On a $\tan\hat{W}=\frac{\sin\hat{W}}{\cos\hat{W}}$ donc $\tan\hat{W}=\frac{\sqrt{45}}{7}:\frac{2}{7}$ donc $\tan\hat{W}=\frac{\sqrt{45}}{7}\times\frac{7}{2}$ d'où $\boldsymbol{\tan\hat{W}=\frac{\sqrt{45}}{2}}$.

2. Pour construire $\hat{W}$ on peut construire un triangle *ABW* rectangle en *A* avec *AW* = 2 cm et *BW* = 7 cm.

Exercice 19

a] De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ on déduit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
On a alors $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ d'où $\boldsymbol{\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1}$.

b] On sait que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

On a donc $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ d'où $\cos^2 x \times \tan^2 x = \sin^2 x$.

De plus, on sait que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

On a donc $\cos^2 x \times \tan^2 x = 1 - \cos^2 x$ donc $\cos^2 x + \cos^2 x \times \tan^2 x = 1$ donc $\cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 1$.

D'où $\boldsymbol{\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}}$.

Exercice 20

1. Comme la somme des angles du triangle ABC vaut 180° alors $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAC} - \widehat{ACH}$ ou encore $\widehat{ABH} = 90 - \widehat{ACH}$.
Comme la somme des angles du triangle AHC vaut 180° alors $\widehat{HAC} = 180 - \widehat{AHC} - \widehat{ACH}$ ou encore $\widehat{HAC} = 90 - \widehat{ACH}$.
On a donc bien $\boldsymbol{\widehat{ABH} = \widehat{HAC}}$.

2. De l'égalité précédente on déduit $\tan \widehat{ABH} = \tan \widehat{HAC}$.

Or dans ABH rectangle en H on a $\tan \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH}$ et dans ACH rectangle en H on a $\tan \widehat{HAC} = \dfrac{CH}{AH}$.

On en déduit que $\boldsymbol{\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{CH}{AH}}$.

3. De l'égalité précédente on déduit $AH \times AH = BH \times CH$ soit $\boldsymbol{AH^2 = BH \times CH}$.