09-04 Transformation affine d'une variable aléatoire

Propriétés

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = aX + b$ avec a et b deux nombres réels.

On a alors :

- $\mathrm{E}(Y) = a\,\mathrm{E}(X) + b$
- $\mathrm{V}(Y) = a^2\,\mathrm{V}(X)$
- $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$

Exemple

Lors d'un jeu de hasard, la variable du gain algébrique G d'un joueur est telle que : $\begin{cases} \mathrm{E}(G) = -3 \\ \sigma(G) = 1 \end{cases}$

Lors d'un autre jeu, le gain algébrique G' du joueur est tel que $G' = -2G - 7$.

On a alors : $\begin{cases} \mathrm{E}(G') = -1 \\ \sigma(G') = 2 \end{cases}$

Démonstration

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

Valeurs x_i	x_1	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

La loi de $Y = aX + b$ est donc :

Valeurs y_i	$ax_1 + b$	...	$ax_n + b$
$P(Y = y_i)$	p_1	...	p_n

L'espérance de Y vaut :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= p_1\times(ax_1 + b) + p_2\times(ax_2 + b) + \dots + p_n\times(ax_n + b) \\ &= p_1ax_1 + p_1b + p_2ax_2 + p_2b + \dots + p_nax_n + p_nb \\ &= a(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) + (p_1 + p_2 + \dots + p_n)b \\ &= a\mathrm{E}(X) + b \end{aligned}$$

On démontre la relation des variances de la même manière, à partir de :
$\mathrm{V}(Y) = p_1\times(ax_1 + b)^2 + p_2\times(ax_2 + b)^2 + \dots + p_n\times(ax_n + b)^2 - \mathrm{E}(Y)^2$

09-04 Transformation affine d'une variable aléatoire

Propriétés

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = aX + b$ avec a et b deux nombres réels.

On a alors :

- $E(Y) = a\,E(X) + b$
- $V(Y) = a^2\,V(X)$
- $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$

Exemple

Lors d'un jeu de hasard, la variable du gain algébrique G d'un joueur est telle que : $\begin{cases} E(G) = -3 \\ \sigma(G) = 1 \end{cases}$

Lors d'un autre jeu, le gain algébrique G' du joueur est tel que $G' = -2G - 7$.

On a alors : ....

Démonstration

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

Valeurs x_i	x_1	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

La loi de $Y = aX + b$ est donc :

Valeurs y_i	......	......	......
$P(Y = y_i)$	......	......	......

L'espérance de Y vaut :

$E(Y) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

On démontre la relation des variances de la même manière, à partir de :

$V(Y) =$ ....