Énoncés

Exercice 1

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

Calculer les expressions suivantes :

a] $\vec{u}.(-3\vec{v})$

b] $\dfrac{\vec{u}}{2}.(5\vec{v})$

c] $\vec{u}.(\vec{v}+4\vec{u})$

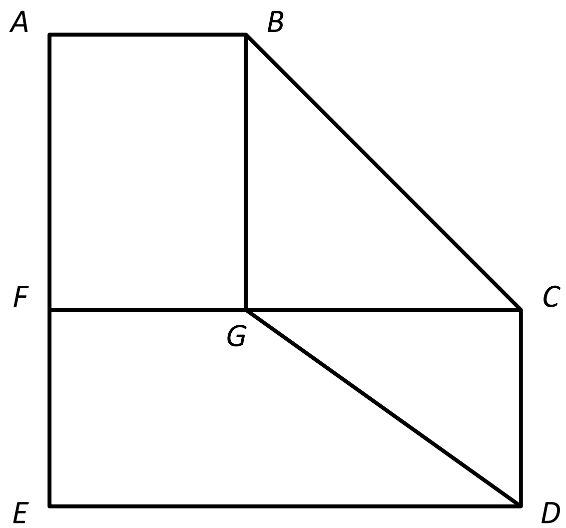
d] $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{v}+4\vec{u})$

e] $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

f] $\|\vec{u}-2\vec{v}\|$

Exercice 2

Sur la figure ci-contre :
- *ABGF* est un rectangle avec *AB* = 5 et *AF* = 7.
- *FCDE* est un rectangle avec *FE* = 5 et *FC* = 12.



Calculer les produits scalaires suivants :

a] $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$

b] $\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

c] $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{ED}$

d] $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}$

e] $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GD}$

f] $\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FD}$

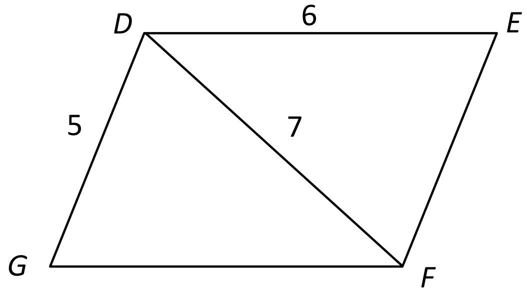
g] $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GD}$

h] $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{BC}$

Exercice 3

1. Soient trois points distincts *A*, *B* et *C*.
En développant l'expression $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$, exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de *AB*, *BC* et *AC*.

2. On considère le parallélogramme ci-contre.
Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{FG}$.



Exercice 4

On considère un carré *EFGH* de côté 4 cm et les points *K* et *L* tels que :

- $\overrightarrow{EK}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{FL}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{FG}$

On nomme *M* et *N* les points d'intersection respectifs de (*GK*) avec (*HL*) et (*EL*).

1. Réaliser une figure.

2. Déterminer si (*GK*) est perpendiculaire à (*LH*).

3. Déterminer un arrondi au dixième de l'angle $\widehat{LNG}$ en degrés.

4. Déterminer si *GM* = *MN*.

Corrigés

Exercice 1

a] $\vec{u}.(-3\vec{v})=-3\vec{u}.\vec{v}$
= (-3)×(-2)
= **6**

b] $\frac{\vec{u}}{2}.(5\vec{v})=\frac{5}{2}\vec{u}.\vec{v}$
$=\frac{5}{2}\times(-2)$
= **(-5)**

c] $\vec{u}.(\vec{v}+4\vec{u})=\vec{u}.\vec{v}+4\vec{u}^2$
= (-2) + 4×3²
= **34**

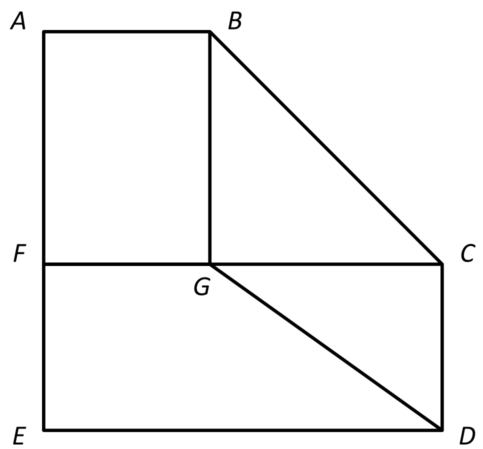
d] $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{v}+4\vec{u})=2\vec{u}.\vec{v}+8\vec{u}^2-\vec{v}^2-4\vec{v}.\vec{u}$
= 2×(-2) + 8×3² – 5² – 4×(-2)
= -4 + 72 – 25 + 8
= **51**

e] $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
= 3² + 2×(-2) + 5²
= 9 – 4 + 25
= **30**

f] $\|\vec{u}-2\vec{v}\|=\vec{u}^2-2\times2\vec{u}.\vec{v}+4\vec{v}^2$
= 3² – 4×(-2) + 4×25
= **117**

Exercice 2

Les produits scalaires **a]** à **d]** se calculent par projection.



a] $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$ = -5×12
= **-60**

b] $\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$ = -7×5
= **-35**

c] $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{ED}$ **= 0**

d] $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}$ = 7×5
= **35**

e] $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GD}=(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FA}).(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{CD}$
= -5×7 + (-1)×7×5
= **-70**

f] $\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FD}=(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GB}).(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{CD}$
= 5×12 + (-1)×7×5
= **25**

g] $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GD}=(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}).(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{GC}^2$
= 7×5 + 7²
= **84**

h] $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}).(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC})$
$=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{GC}$
= -5×7 + 5×7
= **0**

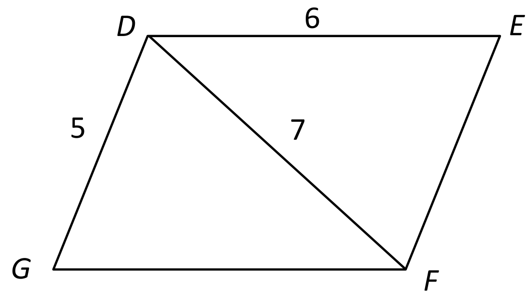
Exercice 3

1. On a : $BC^2=(\overrightarrow{BC})^2$
$=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$
$=AB^2+2\,\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}+AC^2$

Donc $BC^2=AB^2-2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+AC^2$

On en déduit : $2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-BC^2$

Et enfin : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}}$



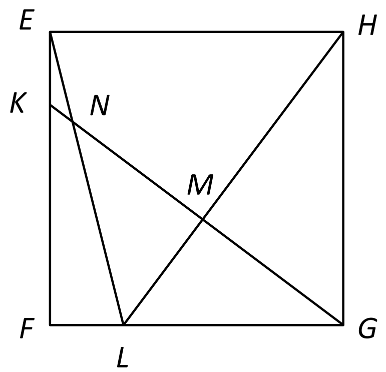
2. $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{FG}=\dfrac{FD^2+FG^2-DG^2}{2}$

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{FG}=\dfrac{49+36-25}{2}$

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{FG}=30}$

Exercice 4

1.



2. $\overrightarrow{GK}.\overrightarrow{LH}=(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FK}).(\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{GH})$
$=\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{GH}$
= -4×3 + 0 + 0 + 3×4
= 0

Les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{LH}$ sont orthogonaux donc (*GK*) est perpendiculaire à (*LH*).

3. On a $\overrightarrow{EL}.\overrightarrow{KG}=(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FL}).(\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FG})$
$=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FL}.\overrightarrow{FG}$
= 12 + 4
= 16

De plus: $\overrightarrow{EL}.\overrightarrow{KG}=EL\times KG\times\cos(\widehat{LNG})$ avec $EL=\sqrt{17}$ et *KG* = 5 (théorème de Pythagore).

$16=\sqrt{17}\times5\times\cos(\widehat{LNG})$

$\cos(\widehat{LNG})=\dfrac{16}{5\sqrt{17}}$ donc $\widehat{LNG}=\cos^{-1}\left(\dfrac{16}{5\sqrt{17}}\right)\approx\mathbf{39{,}1\,°}$

4. Dans le triangle *KFG* rectangle en *F* on a : $\tan(\widehat{KGF})=\dfrac{KF}{FG}=\dfrac{3}{4}$ d'où $\widehat{KGF}=\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)\approx36{,}9\,°$

Comme $\widehat{NGL}\neq\widehat{LNG}$ alors le triangle *LNG* n'est pas isocèle en *L*.
Par conséquent, la hauteur (*LM*) n'est pas la médiatrice de [*GN*] donc *M* n'est pas le milieu de [*GN*].

On a donc ***GM* ≠ *MN***.