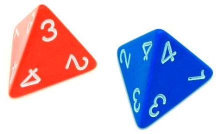
12-05 Activité



On lance simultanément deux dés à 4 faces. Soit X la variable aléatoire telle que :

- Si au moins l'un des deux résultats est 4, alors $X = 10$.
- Si aucun des résultat n'est 4, alors X est égale à la somme du résultat des deux dés.

1. Compléter la loi de probabilité de X :

x_i						
$P(X = x_i)$						

2. Calculer E(X).

3. Calculer la probabilité pour que la distance entre X et E(X) soit plus grande que 1.

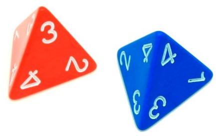
4. Calculer V(X).

5. Compléter le tableau suivant en arrondissant au centième :

t	0,5	1	2	3	4	5
$P(\|X - E(X)\| \geq t)$						
$V(X)/t^2$						

6. Comparer les valeurs obtenues dans les deux dernières lignes du tableau.

12-05 Activité



On lance simultanément deux dés à 4 faces. Soit X la variable aléatoire telle que :

- Si au moins l'un des deux résultats est 4, alors $X = 10$.
- Si aucun des résultat n'est 4, alors X est égale à la somme du résultat des deux dés.

1. Compléter la loi de probabilité de X :

x_i						
$P(X = x_i)$						

2. Calculer E(X).

3. Calculer la probabilité pour que la distance entre X et E(X) soit plus grande que 1.

4. Calculer V(X).

5. Compléter le tableau suivant en arrondissant au centième :

t	0,5	1	2	3	4	5
$P(\|X - E(X)\| \geq t)$						
$V(X)/t^2$						

6. Comparer les valeurs obtenues dans les deux dernières lignes du tableau.

x_i	2	3	4	5	6	10
$P(X = x_i)$	1/16	2/16	3/16	2/16	1/16	7/16

On a E(X) = 6,625.

12-05 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété

Soit X une variable aléatoire et t un réel strictement positif. On a :

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Remarques

- Dans le cas où l'on choisit $t = 2\sigma(X)$ on obtient l'inégalité : $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)) \leq 0{,}25$.
  Autrement dit, la probabilité de s'éloigner de l'espérance avec une distance de plus du double de l'écart-type est toujours inférieure à 0,25.

- Comme $P(|X - E(X)| \geq t) + P(|X - E(X)| < t) = 1$
  alors $P(|X - E(X)| < t) \geq 1 - \frac{V(X)}{t^2}$

Exemple

On lance 800 fois une pièce de monnaie non truquée.
On cherche à déterminer si on a plus ou moins de 50 % de chances d'obtenir entre 381 et 419 fois « Pile ».

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de « Pile ».

X suit la loi binomiale de paramètres (800 ; 0,5).

On a alors $E(X) = 400$ et $V(X) = 200$.

La probabilité que X soit entre 381 et 419 peut se noter $P(|X - E(X)| < 20)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut s'écrire ici : $P(|X - E(X)| \geq 20) \leq \frac{V(X)}{400}$

donc : $P(|X - E(X)| \geq 20) \leq 0{,}5$

ou encore : $P(|X - E(X)| < 20) \geq 0{,}5$

On a donc plus de 50 % de chances d'obtenir entre 381 et 419 fois « Pile » en lançant 800 fois une pièce.

12-05 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété

Soit X une variable aléatoire et t un réel strictement positif. On a :

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Remarques

- Dans le cas où l'on choisit $t = 2\sigma(X)$ on obtient l'inégalité : $P(|X - E(X)| \geq$ .... $) \leq$ ....

  Autrement dit, la probabilité de s'éloigner de l'espérance avec une distance de plus du ....

  ....

- Comme $P(|X - E(X)| \geq t) + P(|X - E(X)| < t) =$ ....

  alors $P(|X - E(X)| < t) \geq$ ....

Exemple

On lance 800 fois une pièce de monnaie non truquée.

On cherche à déterminer si on a plus ou moins de 50 % de chances d'obtenir entre 381 et 419 fois « Pile ».

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de « Pile ».

X suit ....

On a alors $E(X) =$ .... et $V(X) =$ ....

La probabilité que X soit entre 381 et 419 peut se noter $P(|X - E(X)| <$ ....).

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut s'écrire ici : ....

donc : ....

ou encore : ....

On a donc .... de 50 % de chances d'obtenir entre 381 et 419 fois « Pile » en lançant 800 fois une pièce.