

05-09 Propriétés de la loi binomiale de paramètres $(n ; p)$

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur à n , on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Démonstration

Considérons l'arbre de probabilités d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Un chemin constitué de succès et échecs a une probabilité de réalisation égale à

Le nombre total de chemins comportant k succès parmi n épreuves est

On a donc bien =

Propriétés

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.

- L'espérance de X vaut $E(X) = np$
- La variance de X vaut $V(X) = np(1 - p)$

Exemple

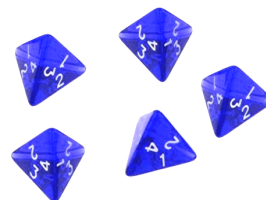
On lance cinq dés à quatre faces en gagnant 1 € pour chaque 2 obtenu.

Le gain quotidien suit

Sa loi de probabilité est :

En répétant cette expérience chaque jour pendant un grand nombre d'années, on aura gagné en moyenne :

..... = euros par jour avec un écart-type valant



Utilisation de la calculatrice

- Si X suit la loi $\mathcal{B}(5 ; 0,25)$ on calcule $P(X = 3)$ ainsi :
- Si X suit la loi $\mathcal{B}(5 ; 0,25)$ on calcule $P(X \leq 3)$ ainsi :

05-09 Applications du cours

Application 1

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 6 et 0,3.

Exprimer en fonction de X la probabilité des événements suivants puis écrire leur résultat arrondi au millièmes.

A = « Obtenir exactement un succès »

$E = \overline{B}$

B = « Obtenir au moins deux succès »

$F = \overline{D}$

C = « Obtenir au plus un succès »

$G = \overline{C}$

D = « Obtenir au plus quatre échecs »

$H = \overline{A}$

Application 2

Soit n un entier strictement supérieur à 1 et soit p un nombre réel compris entre 0 et 1.

Soient une expérience aléatoire et une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Compléter les phrases suivantes.

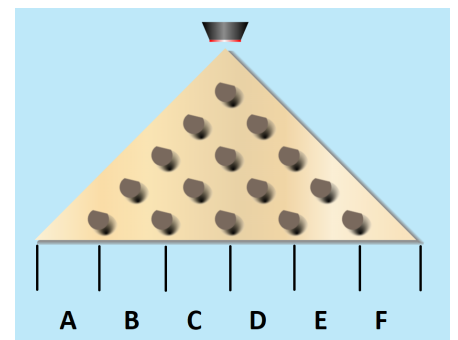
- a] La variable aléatoire Y égale au nombre d'échecs suit la loi binomiale de paramètres
- b] Si $P(X=0) < 0,1$ alors $P(X > \dots) \dots \dots$
- c] En répétant l'expérience chaque jour, alors après un très grand nombre de jour on aura
..... échecs

Application 3

Des billes sont lâchées une par une sur la planche de Galton ci-contre.

Chaque fois qu'une bille rebondit sur une pièce de bois, elle a 67 % de chances d'aller à droite de la pièce.

1. Décrire la situation en utilisant les termes « épreuve de Bernoulli » ; « succès » ; « schéma de Bernoulli » et « loi binomiale ».
2. Conjecturer quelle colonne a le plus de chances de recevoir les billes puis vérifier cette conjecture.



Application 4

1. Dans une loterie, 1 ticket sur 10 est gagnant. Alix achète 10 tickets.
 - a] Décrire cette situation avec le vocabulaire du cours.
 - b] Quelle est la probabilité qu'Alix gagne ?
2. Dans une loterie, 1 ticket sur n est gagnant. Berthe achète n tickets.
Si la probabilité qu'elle gagne est inférieure à 0,64 alors que peut-on en déduire pour n ?