03-07 Théorème du point fixe

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in I$.

Soit une suite (u_n) telle que $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.

Si la suite (u_n) converge vers un réel $L \in I$ alors L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 1$.

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) =$ .... est ....

Si l'on parvient à démontrer que (u_n) converge alors sa limite est solution de l'équation ....

Remarque

Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

On démontre par comparaison avec la suite .... de raison 2 et de premier terme 1 que (u_n) ....

La solution de l'équation .... existe mais ne présente pas d'intérêt ici.

Méthode : effectuer une conjecture graphique.

Soit une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 6$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+3}$.

1. Tracer la représentation graphique de f. Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
2. Lire u_1 sur l'axe des ordonnées. Reporter u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite $y = x$.
3. En répétant l'étape précédente, on peut conjecturer la limite éventuelle de (u_n).