01-05 Opérations sur les limites

Propriétés (sommes de limites)

Soient deux suites (u_n) et (v_n). Soient U et V deux réels.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = U$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = V$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = U$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = U$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors ....

Propriétés (produits de limites)

Soient deux suites (u_n) et (v_n). Soient U et V deux réels. Soit L un réel non nul.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = U$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = V$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ alors .... en appliquant ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ alors .... en appliquant ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ alors ....

Propriétés (quotients de limites)

Soient L un réel. Soit une suite (u_n).

Soit L' un réel non nul. Soit une suite (v_n) dont les termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ en étant .... alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors ....
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ alors ....

01-05 Applications du cours

Application 1

Déterminer la limite des suites suivantes en justifiant brièvement.

(a_n) : $a_n = n + n^2$

(b_n) : $b_n = n\sqrt{n}$

(c_n) : $c_n = 3n - \dfrac{1}{n}$

(d_n) : $d_n = \dfrac{1}{n^2+4}$

(e_n) : $e_n = 19 - 0{,}1\sqrt{n}$

(f_n) : $f_n = \dfrac{5}{n} + \dfrac{6}{\sqrt{n}} - 1$

(g_n) : $g_n = (9-n)(3+2n^2)$

(h_n) : $h_n = \dfrac{8+n}{5-\dfrac{2}{n}}$

(i_n) : $i_n = \dfrac{-2}{6-n}$

Application 2

(u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $(2u_n - 5v_n)$ converge.
2. Si (u_n) et $(u_n + v_n)$ convergent alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) et (u_nv_n) convergent alors (v_n) converge.
4. Si (u_n) et (v_n) divergent alors $(u_n + v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) et (v_n) divergent alors (u_nv_n) diverge.

Application 3

1. Soit la suite (a_n) telle que $a_n = n^3 - 5n^2 - 3n + 2$ pour tout entier n.
   - a] Conjecturer à l'aide d'une calculatrice la limite de la suite (a_n).
   - b] Factoriser a_n avec le facteur n^3 : $a_n = n^3(\quad \dots\dots\dots\dots \quad)$
   - c] En déduire la limite de la suite (a_n).
2. Soit la suite (b_n) telle que $b_n = -2n^5 + n^3 - 10$ pour tout entier n.
   Factoriser b_n afin de déterminer la limite de la suite (b_n).
3. Déduire des questions précédentes une propriété des polynômes qui évitera de refaire tous ces calculs.
4. Déterminer la limite de la suite (c_n) telle que $c_n = \dfrac{n-2}{2n+1}$ pour tout entier n.