01-01 Activités

Activité 1

André Franquin (1924-1997) est un dessinateur belge connu notamment pour la série « Idées noires » (1977) dont la planche ci-contre est extraite.

Activité 2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$.

1. Quels sont les cinq premiers termes de cette suite ?
2. Conjecturer une expression explicite de u_n pour tout entier naturel n.
3. Avec un tableur, déterminer que la propriété est vraie jusqu'au rang 47.
4. Sans tableur ni instrument de calcul, prouver que la propriété est vraie au rang 48.
5. Prouver que si la conjecture est vérifiée à un rang r alors elle est forcément vérifiée au rang suivant $r + 1$.
6. Que peut-on en déduire ?

01 Suites numériques

01-01 Le raisonnement par récurrence

But

Démontrer la validité d'une propriété $P(n)$ qui dépend d'un nombre entier n.

Initialisation

On montre qu'il existe un entier i tel que ..... On choisit généralement ..... ou .....

Hérédité

On montre que la validité de $P(r)$ pour un rang ..... entraîne forcément la validité de .....

Conclusion

Si l'initialisation et l'hérédité de la propriété sont vérifiées, alors $P(n)$ est vraie pour .....

Exemple

Montrer que, pour tout $n \geq 1$ on a : $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$. On nomme $P(n)$ cette propriété.

- Initialisation

  Pour $n = 1$ on a ..... et ..... Donc ..... est vraie.

- Hérédité

  Soit r un entier supérieur à 1 tel que $P(r)$ est vraie.

  On a alors : $1 + 3 + ... + (2r - 1) = r^2$

  donc $1 + 3 + ... + (2r - 1) + (2(r + 1) - 1) = r^2 +$ .....

  $1 + 3 + ... + (2r - 1) + (2(r + 1) - 1) =$ .....

  $1 + 3 + ... + (2r - 1) + (2(r + 1) - 1) =$ .....

  Donc ..... est vraie.

- Conclusion

  Comme $\begin{cases} P(1) \text{ .....} \\ \text{Pour ..... la validité de ..... entraîne la validité de .....} \end{cases}$

  alors ..... est vraie pour .....

01-01 Applications du cours

Application 1

On considère une infinité de dominos en ligne, placés à une distance « raisonnable » les uns des autres, c'est-à-dire telle que la chute d'un domino entraîne celle du voisin.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on nomme $P(n)$ la propriété suivante :
« Le domino numéro n chute ».

On fait chuter le domino n°1. Démontrer par récurrence que tous les dominos chutent.

Application 2

1. Déterminer que, pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

2. Déterminer si, pour tout entier naturel n, $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.

Application 3

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0^2+1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Application 4

Pour tout entier $n > 0$, on définit la propriété $P(n)$: « $2^n + 3$ est un nombre premier ».

1. Déterminer si $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

2. Déterminer si $P(n)$ est vraie pour tout entier $n > 0$.

3. Que nous apprend cet exercice ?

Application 5

Pour tout entier naturel n, on définit la propriété $P(n)$: « $8^n + 1$ est divisible par 7 ».

1. Montrer que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k alors $P(k + 1)$ est vraie.

2. Déterminer si $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. Que nous apprend cet exercice ?