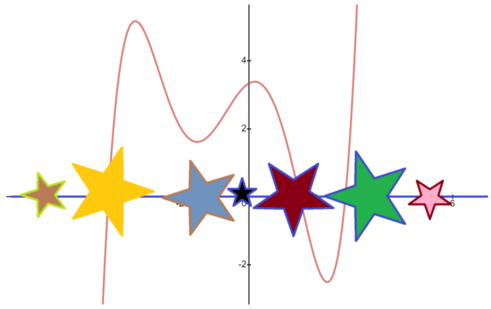
02-04 Continuité d'une fonction

Introduction

Claire dessine une courbe rouge sans lever le stylo.
Son petit frère juge que le dessin sera plus joli avec des gommettes collées le long de l'axe des abscisses.

Combien de fois la courbe de Claire coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

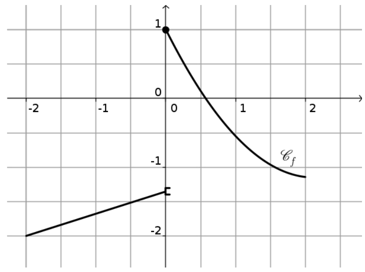


Définition

Une fonction *f* définie sur un intervalle *I* est **continue** sur cet intervalle *I* si, pour tout nombre *a* appartenant à *I*, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ que l'on s'approche de *a* par la gauche ou par la droite.

Remarques

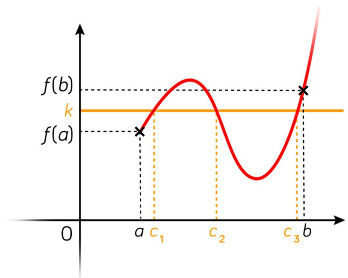
- Graphiquement, « continue » se traduit par « sans lever le stylo ».
- La fonction ci-contre est définie sur un intervalle *I* mais non continue :
  On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ mais $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \approx -1{,}3$
- Toutes les fonctions usuelles sont continues sur leur intervalle de définition : les polynômes, exponentielle, racine carrée, inverse, etc.



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [*a* ; *b*].
Soit *k* un nombre compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*).

Il existe au moins une valeur *c* de l'intervalle [*a* ; *b*] telle que *f*(*c*) = *k*.



Remarques

- Dans l'exemple d'introduction, la courbe de Claire coupe l'axe des abscisses **au moins** trois fois.
- Si l'on ajoute dans les conditions du théorème des valeurs intermédiaires le fait que *f* est monotone (croissante ou décroissante) sur [*a* ; *b*] alors cela conduit à l'unicité de la valeur *c*.