07-03 Activités

Activité 1

1. Choisir un nombre premier p et un nombre entier n.

2. Calculer le reste de la division euclidienne de n^p par p.

3. Recommencer jusqu'à émettre une conjecture.

Activité 2

1. Tester le programme suivant avec différentes valeurs de a et b :

```
a=32
b=10
for i in range(1,b):
  print((a*i)%b)
```

2. Que remarque-t-on lorsque a et b sont premiers entre eux ?

3. Démontrer cette conjecture à l'aide du théorème de Gauss (chapitre 04-04).

07-03 Le petit théorème de Fermat

Théorème

Soit n un nombre entier.
Si p est un nombre premier ne divisant pas n, alors $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Exemples

$n \setminus p$	2	3	5	7
1				
2				
3				
4				

Démonstration

....

....

....

....

....

Remarque

Ce théorème est un test de primalité. Si deux entiers n et p sont tels que ...... ne divise pas ...... et que $n^{p-1} - 1$ n'est pas .... alors p n'est pas premier.

Conséquence

Si p est un nombre premier et si n un nombre entier alors $n^p \equiv n\ [p]$.

Démonstration

Soient p est un nombre premier et n un nombre entier.

- Si p ne divise pas n, alors ....
  D'où ....
- Si p divise n, alors $n \equiv 0\ [p]$ et ....
  D'où ....

07-03 Applications du cours

Application 1

Dans chaque cas, déterminer le reste de la division euclidienne de a par b.

a] $a = 3^{31}$; $b = 7$. **b]** $a = 128^{130}$; $b = 17$. **c]** $a = 55^{28}$; $b = 23$.

Application 2

Soit p un nombre premier.

Démontrer que, pour tout entier n, on a $3^{n+p} - 3^{n+1}$ divisible par p.

Application 3

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $3^{6n} - 1$ est divisible par 7.

Application 4

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $n^{11} - n$ est divisible par 33.

Application 5

Soit p un nombre premier.

Démontrer que, pour tout couple d'entiers relatifs a et b, on a $(a + b)^p \equiv a^p + b^p\ [p]$.

Application 6

Examiner l'affirmation suivante :

« Si a, b et c sont trois nombres premiers strictement supérieurs à 3 alors $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas premier ».

Application 7

Soit l'ensemble E des nombres premiers p tels que $4p^2 + 1$ et $6p^2 + 1$ sont aussi des nombres premiers.

1. Montrer que E n'est pas vide.

2. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 5.

a] Démontrer que $(4p^2 + 1)(6p^2 + 1)$ et $(-p^4 + 1)$ ont le même reste par la division euclidienne par 5.

b] En déduire les éléments de l'ensemble E.