Énoncés

Exercice 14

Un projectile est lancé d'un point *O* avec une vitesse initiale *v* (en m/s) et un angle de 45° avec l'horizontale.
On note *h* la hauteur maximale atteinte par le projectile (en mètres).

v	100	200	400	600	800
...	240	980	3950	8800	15500

1. Compléter la première colonne du tableau.

2. Déterminer *h*(200) et interpréter ce résultat dans le contexte du problème.

3. **a]** Déterminer si ce tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité.

b] Que peut-on en déduire en ce qui concerne la fonction *h* ?

Exercice 15

Déterminer la nature des fonctions suivantes :

$f_1 : x \to x-1$ $\quad$ $f_2 : x \to 2-5x$ $\quad$ $f_3 : x \to \dfrac{5x+2}{3}$

$f_4 : x \to \pi x$ $\quad$ $f_5 : x \to x(x+1)-x^2$ $\quad$ $f_6 : x \to x(x+1)^2-x^3$

Exercice 16

Le prix d'un kg de pommes est 1,50 €.
On considère la fonction *f* par laquelle la masse de pommes en kg a pour image son prix.

1. **a]** Donner une expression de *f*.
b] Quelle est la nature de la fonction *f* ?

2. **a]** Calculer l'image de 10 par *f* et interpréter le résultat par rapport à la situation.
b] Déterminer l'antécédent de 4,8 par *f* et interpréter le résultat.

3. **a]** Justifier l'égalité *f*(3) + *f*(7) = *f*(10) par le calcul et l'interpréter par rapport à la situation.
b] Même question avec l'égalité *f*(20) = 2 × *f*(10).

4. Quelle est l'image de (-6) par *f* ? Peut-on interpréter ce résultat par rapport à la situation ?

Exercice 17

1. Prisca dit "La fonction qui, au rayon d'un cercle, associe son périmètre, est une fonction affine."
Landrade répond "Tu te trompes : remplace *périmètre* par *aire* et ta phrase deviendra juste."
Déterminer, en justifiant, qui a raison, de Prisca ou de Landrade.

2. Déterminer la fonction h qui, à un nombre x, associe la hauteur du triangle équilatéral de côté x.
Préciser la nature de h.

Exercice 18

Soit h la fonction affine qui, à un nombre x, associe le nombre $7x + 3$.

1. a] Calculer les images de (-3) ; (-1) ; 2 ; 4 ; et 5 par la fonction h.

b] Calculer les rapports suivants : $\dfrac{h(5)-h(2)}{5-2}$; $\dfrac{h(5)-h(-1)}{5-(-1)}$; $\dfrac{h(-3)-h(4)}{-3-4}$

c] Démontrer que, quels que soient c et d (avec $c \neq d$), l'accroissement $\dfrac{h(c)-h(d)}{c-d}$ est constant.

2. Compléter les phrases suivantes :

Lorsque x augmente de 1, $h(x)$ augmente de …

Lorsque x augmente de 3, $h(x)$ augmente de …

Si la différence entre deux nombres est (-2), alors la différence entre leurs images par la fonction h est ...

Exercice 19

1. Déterminer la fonction linéaire g qui, au nombre 6, associe $\dfrac{4}{3}$.

2. Soit f la fonction affine telle que $f(4) = 11$ et $f(6) = 8$.

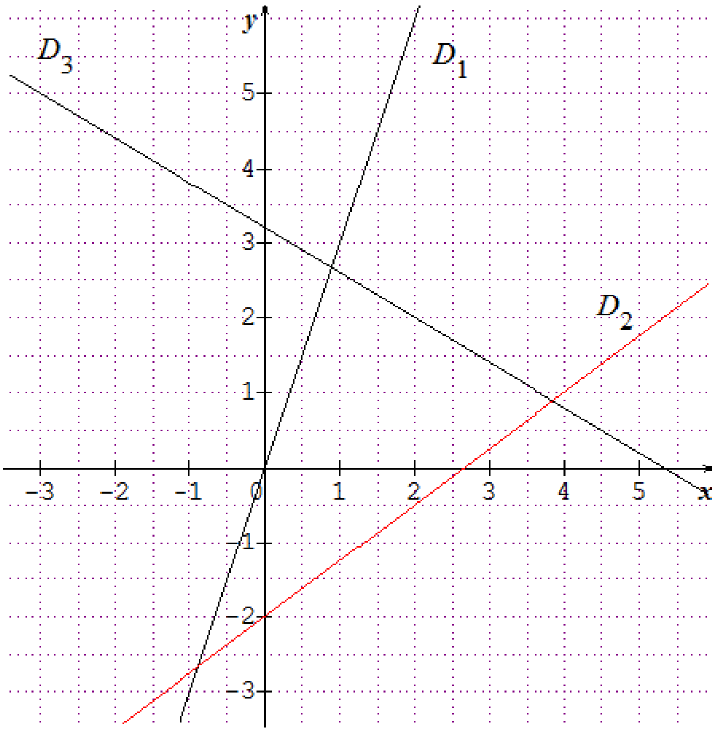
a] Calculer l'accroissement de f entre 4 et 6. En déduire que $f(x)$ s'écrit sous la forme $-\dfrac{3}{2}x+b$.

b] À partir de la relation $f(4) = 11$ écrire une équation dont b est l'inconnue.
Résoudre l'équation et en déduire l'écriture de f.

3. Déterminer la fonction affine h telle que $h(2) = -1$ et $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$.

Exercice 20

On considère les représentations graphiques (D_1), (D_2) et (D_3) respectives des fonctions f_1 , f_2 et f_3.



1. **a]** Placer sur (D_1) un point A_1 dont on lira les coordonnées.
b] En déduire la pente de (D_1).
c] En déduire l'expression de f_1.

2. **a]** Placer sur (D_2) deux points A_2 et B_2 dont on lira les coordonnées.
b] En déduire la pente de (D_2).
c] Lire sur le graphique l'ordonnée à l'origine de (D_2).
d] En déduire l'expression de f_2.

3. **a]** Placer sur (D_3) deux points A_3 et B_3 dont on lira les coordonnées.
b] En déduire la pente de (D_3).
c] Peut-on lire sur le graphique l'ordonnée à l'origine de (D_3) ?
d] Déterminer l'expression de f_3.

Corrigés

Exercice 14

1. On complète la première colonne du tableau avec ***h*(*v*)**.

2. On a $h(200) = 980$.
Cela signifie que **980 m** est la hauteur maximale atteinte par le projectile lancé à 200m/s.

3. **a]** On a $980 \times 100 = 98000$ et $240 \times 200 = 48000$.
Comme $98000 \neq 48000$ alors **on n'a pas un tableau de proportionnalité**.

b] On en déduit que la fonction ***h* n'est pas une fonction linéaire**.

Exercice 15

f_1 est affine avec $a = 1$ et $b = -1$.
f_2 est affine avec $a = -5$ et $b = 2$.
f_3 est affine avec $a = \frac{5}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.
f_4 est affine et linéaire avec $a = \pi$.
f_5 est affine et linéaire avec $a = 1$.
f_6 n'est pas affine car $f_6(x) = 2x^2 + x$.

Exercice 16

1. **a]** La fonction *f* associe, à une masse *x* en kg, son prix $\boldsymbol{f(x) = 1{,}5x^2 + x}$ en euros.
b] La fonction *f* est **linéaire de coefficient 1,5**.

2. **a]** L'image de 10 par *f* est $f(10) =$ **15**. Cela signifie que **10 kg de pommes coûtent 15 €**.
b] Cherchons *x* tel que $f(x) = 4{,}8$ soit $1{,}5\,x = 4{,}8$ d'où $x = 3{,}2$. L'antécédent de 4,8 par *f* est 3,2.
Cela signifie que **pour payer 4,8 € il faut choisir 3,2 kg de pommes**.

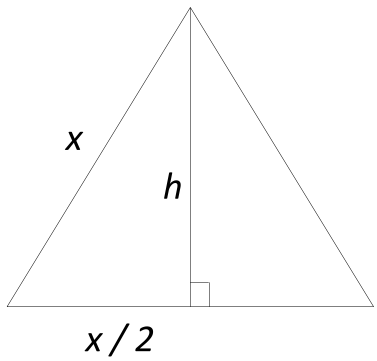
3. **a]** On a $f(3) + f(7) = 1{,}5\times3 + 1{,}5\times7$ **= 15**. On a donc bien $f(3) + f(7) = f(10)$.
Cela signifie qu'en achetant 3 kg puis 7 kg de pommes, on paiera la même somme qu'en achetant 10 kg de pommes.
b] On a $f(20) = 1{,}5\times20$ **= 30**. On a donc bien $f(20) = 2 \times f(10)$.
Cela signifie qu'on paie la même somme en achetant 20 kg de pommes qu'en achetant 2 fois 10 kg.

4. L'image de (-6) par *f* est $1{,}5\times(-6) = -9$.
Comme une masse ne peut pas être négative, on ne peut pas interpréter ce résultat ici.

Exercice 17

1. La fonction qui, au rayon d'un cercle, associe son périmètre, est $x \to 2\pi x$.
C'est une fonction linéaire avec 2π pour coefficient.
La fonction qui, au rayon d'un cercle, associe son aire, est $x \to \pi x^2$, qui n'est pas une fonction affine.
Par conséquent, Landrade a deux fois tort : non seulement sa proposition est fausse mais en plus Prisca avait raison.

2. Soit un triangle équilatéral de côté *x* et de hauteur *h*.
Comme la hauteur se confond avec la médiatrice, la bissectrice et la médiane relatives au même sommet, alors on obtient un triangle rectangle vérifiant $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2$ d'où $h^2 = \frac{3x^2}{4}$ donc $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.



Autrement dit, la fonction *h* qui, à un nombre *x*, associe la hauteur du triangle équilatéral de côté *x* est $\boldsymbol{h : x \to \frac{\sqrt{3}}{2}x}$.

C'est une fonction linéaire de coefficient $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 18

1. **a]** Les images de (-3) ; (-1) ; 2 ; 4 et 5 par la fonction *h* sont respectivement **(-18) ; (-4); 17 ; 31 et 38**.

b] $\frac{h(5)-h(2)}{5-2} = \frac{38-17}{3}$; $\frac{h(5)-h(-1)}{5-(-1)} = \frac{38-(-4)}{6}$; $\frac{h(-3)-h(4)}{-3-4} = \frac{-18-31}{-7}$

Après calcul et simplification, ces trois rapports sont égaux à 7.

c] On a
$$\frac{h(c)-h(d)}{c-d} = \frac{7c+3-(7d+3)}{c-d}$$
$$= \frac{7c-7d}{c-d}$$
$$= \frac{7(c-d)}{c-d} = 7$$

L'accroissement $\frac{h(c)-h(d)}{c-d}$ est donc constant pour toutes les valeurs de *c* et *d*.

2. On a montré en **1.** que pour tous les nombres *c* et *d* on a $h(c) - h(d) = 7(c - d)$.
Autrement dit l'écart entre deux images vaut 7 fois l'écart entre les deux antécédents correspondant.

Par conséquent :

Lorsque *x* augmente de 1, *h*(*x*) augmente de 7.
Lorsque *x* augmente de 3, *h*(*x*) augmente de 21.
Si la différence entre deux nombres est (-2), alors la différence entre leurs images par *h* est (-14).

Exercice 19

1. La fonction linéaire g qui, au nombre 6, associe $\frac{4}{3}$ est de la forme $g(x) = ax$ avec $g(6)=\frac{4}{3}$.

On a donc $6a=\frac{4}{3}$ d'où $a=\frac{2}{9}$. Par conséquent on a $\boldsymbol{g : x \to \frac{2}{9}x}$.

2. **a]** L'accroissement de f entre 4 et 6 vaut $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=-\frac{3}{2}$.

L'accroissement de f vaut $\left(-\frac{3}{2}\right)$. D'où $\boldsymbol{f(x)=-\frac{3}{2}x+b}$.

b] On a $f(4)$ qui vaut $-\frac{3}{2}\times 4+b=-6+b$

Donc la relation $f(4) = 11$ entraîne $-6 + b = 11$ d'où $b = 17$.

Par conséquent on a $\boldsymbol{f(x)=-\frac{3}{2}x+17}$.

3. Comme la fonction h est affine alors on a $h(x)$ de la forme $ax + b$.

a est l'accroissement de la fonction h donc $a=\frac{h(2)-h(1/2)}{2-1/2}$ donc $a=\frac{-4}{3/2}$ soit $a=-\frac{8}{3}$.

b vérifie $h(2) = a\times 2 + b$ ou encore $-1=-\frac{8}{3}\times 2+b$ donc $b=\frac{13}{3}$. On a donc $\boldsymbol{h(x)=-\frac{8}{3}x+\frac{13}{3}}$.

Exercice 20

1. **a]** On a le point $A_1(1 ; 3)$ qui appartient à (D_1).

b] La pente de (D_1) vaut $\frac{3}{1}=3$.

c] On en déduit que $\boldsymbol{f_1(x) = 3x}$.

2. **a]** On a les points $A_2(0 ; -2)$ et $B_2(4 ; 1)$ qui appartiennent à (D_2).

b] La pente de (D_2) vaut $\frac{1-(-2)}{4-0}=\frac{3}{4}$.

c] On lit sur le graphique que l'ordonnée à l'origine de (D_2) est (-2).

d] On en déduit que $\boldsymbol{f_2(x)=\frac{3}{4}x-2}$.

3. **a]** On a les points $A_3(-3 ; 5)$ et $B_3(2 ; 2)$.

b] La pente de (D_3) vaut $\frac{5-2}{-3-2}=-\frac{3}{5}$.

c] On peut difficilement lire sur le graphique l'ordonnée à l'origine de (D_3).

d] f_3 est de la forme $f_3(x)=-\frac{3}{5}x+b$ avec $f_3(2) = 2$ donc $2=-\frac{3}{5}\times 2+b$ d'où $b=\frac{16}{5}$.

On a donc $\boldsymbol{f_3(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{16}{5}}$.