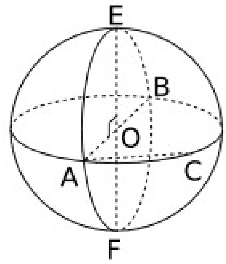
Exercices de $3^{ème}$ – Chapitre 8 – Compléments géométriques

Énoncés

Exercice 1

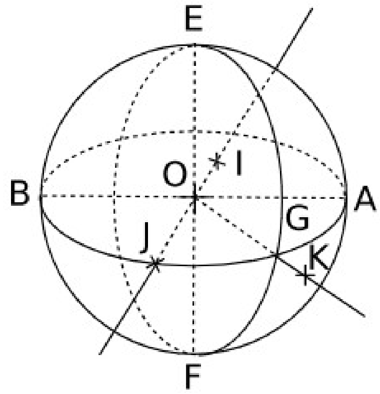
La figure ci-contre représente une sphère de centre O et de rayon 3 cm.
$[AB]$ et $[EF]$ sont deux diamètres perpendiculaires.
C est un point de la sphère tel que $AC = 4$ cm.



1. Sans justifier, indiquer la nature des triangles ABC, AOE, BOC et EAF.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

Exercice 2

La figure ci-contre représente une boule de diamètre $[AB]$.



1. Marquer en rouge les points qui sont sur la sphère de centre O et de rayon OA.
Marquer en bleu les points qui sont à l'intérieur de la boule de centre O et de rayon OA.

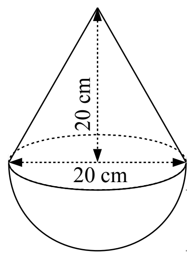
2. Placer sur la figure le point H, diamétralement opposé à G.
Placer un point L sur la demi-droite $[OG)$ qui appartienne à la boule de rayon OA.

3. Tracer à main levée sur la figure le cercle de centre O passant par E et J.

4. Nommer tous les diamètres et les rayons de la boule à l'aide des points donnés.

Exercice 3

Le culbuto ci-contre est un jouet pour enfant qui oscille sur une base sphérique.

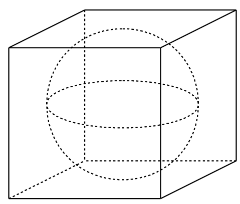


1. Calculer son volume exact puis donner l'arrondi au cm^3.

2. La base sphérique est remplie de sable.
Quelle proportion du jouet est occupée par le sable ?

Exercice 4

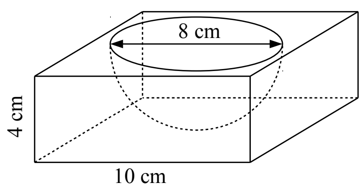
Une balle lestée, de 5cm de rayon, est plongée dans un cube de côté 10cm rempli d'eau.



1. Calculer le volume du cube.
2. Calculer le volume de la balle lestée.
3. On plonge la balle dans l'eau qui déborde. Calculer le volume d'eau restant dans le cube arrondi au cm^3.
4. Déterminer la hauteur de l'eau dans le cube lorsqu'on retire la balle, arrondie au mm.

Exercice 5

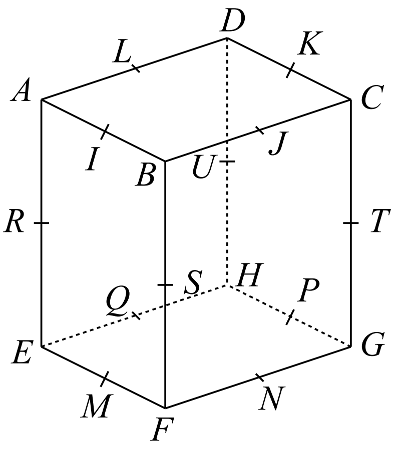
Un moule à gâteau a la forme d'un pavé droit à base carrée dans lequel on a évidé une demi-boule.



1. Calculer le volume de plastique nécessaire pour fabriquer ce moule, en arrondi au mm^3.

2. Mayeul veut napper entièrement son gâteau de chocolat.
Déterminer la surface de gâteau à recouvrir, arrondie au mm^2.

Exercice 6



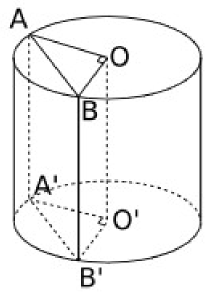
Les points *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* et *U* sont les milieux des arêtes du pavé droit *ABCDEFGH*.

a. Tracer en rouge la section du pavé par le plan contenant le point *R* et parallèle à la face *ABCD*.

b. Tracer en bleu la section du pavé par le plan contenant le point *Q* et parallèle à l'arête [*BF*] sans être parallèle au plan *ABFE*.

c. Tracer en vert la section du pavé par le plan contenant le point E et parallèle à l'arête [*DC*] sans être parallèle aux plans *ABFE* et *EHGF*.

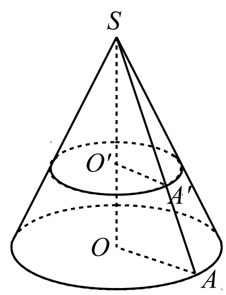
Exercice 7



On réalise la section *ABB'A*' par un plan parallèle à l'axe d'un cylindre de hauteur [*OO*'] mesurant 5 cm et de rayon [*OA*] mesurant 3 cm, de sorte que le triangle *AOB* soit rectangle en *O*.

1. Préciser la nature du triangle *AOB*.
2. Sans justifier, quelle est la nature de la section *ABB'A*' ?
3. Calculer l'aire de *ABB'A*' arrondie au mm².

Exercice 8



On réalise la section d'un cône de révolution (*C*), de sommet *S*, de base le disque de centre *O* et de génératrice [*SA*], par un plan parallèle à la base passant par le point *A'* de la génératrice [*SA*].
On nomme (*C'*) le petit cône ainsi formé.
On a *SA* = 8 cm ; *SO* = 6 cm et *SA'* = 5 cm.

1. Quel lien précis existe-t-il entre les deux cônes ?

2. Quel est le rapport des volumes des deux cônes ?

Exercice 9

Un cube a une arête de 5 cm.

1. Quelle est, en cm², l'aire de sa surface totale, c'est-à-dire la surface composée par ses six faces ?
2. Calculer le volume, en cm³, de ce cube.
3. Un autre cube a une surface totale 16 fois plus grande. Quel est le volume, en litres, de ce cube ?

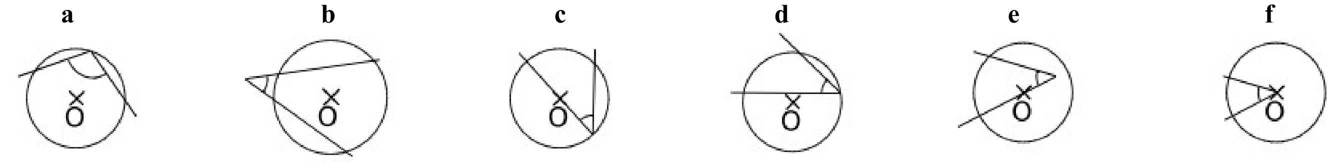
Exercice 10

1. Dessiner une représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de hauteur 4 cm et de côté de base 2,4 cm.
2. Calculer l'aire de la base de cette pyramide.
3. Calculer le volume de cette pyramide.
4. Compléter la représentation en traçant la section de la pyramide par le plan parallèle à la base coupant la hauteur aux trois-quarts en partant du sommet.
5. Déduire de la question **2.** l'aire de la base de la petite pyramide.
6. Déduire de la question **3.** le volume de la petite pyramide.

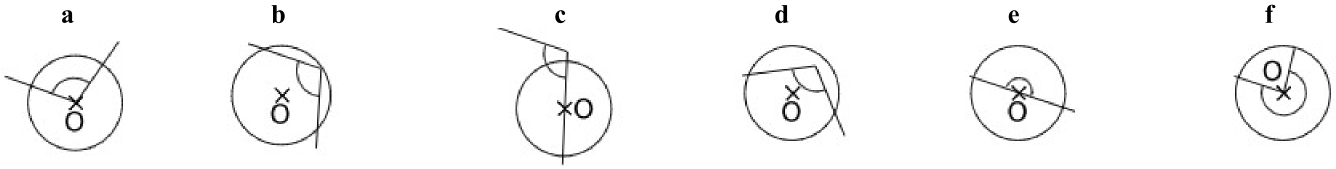
Exercice 11

Sur les figures de cet exercice, *O* est le centre du cercle.

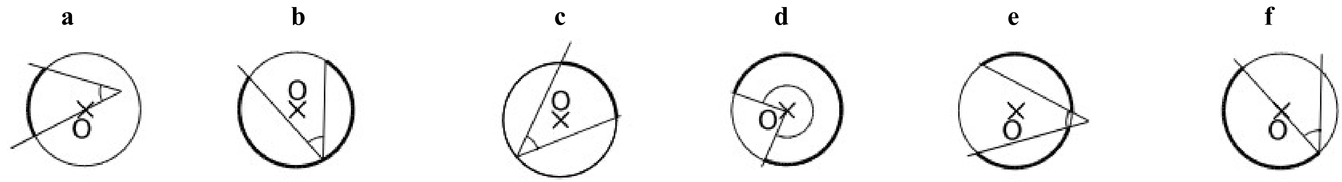
1. Parmi ces figures, lesquelles montrent un angle inscrit dans le cercle ?



2. Parmi ces figures, lesquelles montrent un angle au centre du cercle ?

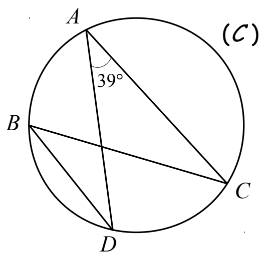


3. Pour quelles figures l'angle marqué intercepte-t-il l'arc en gras ?



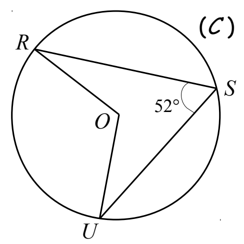
Exercice 12

Les points *A*, *B*, *C* et *D* sont sur le cercle (*C*).
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{DBC}$.



Exercice 13

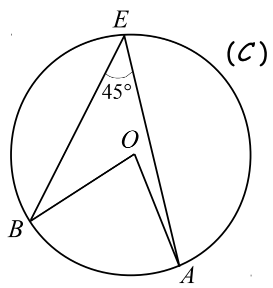
R, *S* et *U* sont sur le cercle (*C*) de centre *O*.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ROU}$.



Exercice 14

A, *B* et *E* sont sur le cercle (*C*) de centre *O*.

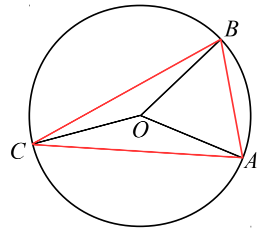
Démontrer que *OAB* est un triangle rectangle et isocèle en *O*.



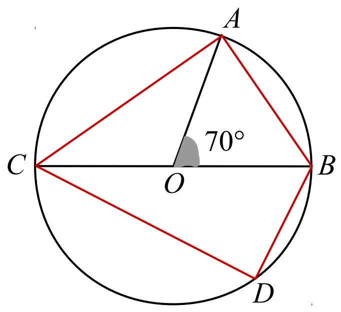
Exercice 15

O est le centre du cercle passant par les points *A*, *B* et *C*.
$\widehat{AOB}=50°$ et $\widehat{BOC}=150°$.

Déterminer les mesures des angles du triangle *ABC*.



Exercice 16



Le cercle ci-dessous a pour centre O et [BC] est un diamètre.
On a $OC = 4$ cm, $BD = 3$ cm et $\widehat{AOB} = 70°$.

1. Calculer, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
3. Calculer la longueur AB, donner le résultat arrondi au dixième.
4. Calculer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CBD}$.
5. En déduire une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{COD}$.

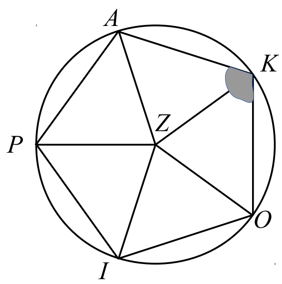
Exercice 17

Placer deux points distincts I et M puis construire le pentagone régulier $KLMNO$ de centre I en justifiant brièvement.

Exercice 18

Tracer un segment [EF] puis construire l'hexagone régulier $EFGHIJ$ en justifiant brièvement.

Exercice 19



OKAPI est un pentagone régulier de centre Z.

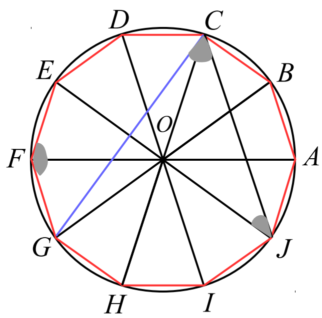
1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OKA}$.

2. On considère le pentagone croisé *PKIAO*.
   Calculer la mesure de l'angle $\widehat{POA}$ formé par deux côtés de cette étoile.

Exercice 20

ABCDEFGHIJ est un décagone régulier de centre O.

1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{GCJ}$.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EJC}$.



Corrigés

Exercice 1

1. ABC est rectangle en C ; AOE est rectangle en O ; BOC est isocèle en O ; EAF est isocèle rectangle en A.

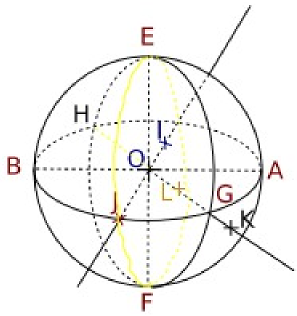
2. Comme le triangle ABC est rectangle en C alors $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}$

donc $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{4}{6}$

d'où $\boldsymbol{\widehat{ABC} \approx 42°}$

Exercice 2

1. **2.** **3.** Voir ci-contre.



4. Diamètres : [AB], [EF] et [GH]
Rayons : [OA], [OB], [OE], [OF], [OG], [OH] et [OJ].

Exercice 3

1. Ce solide est composé de :

- un cône de hauteur 20cm dont la base est un disque de rayon $\frac{20}{2} = 10\text{ cm}$ et d'aire $\pi \times 10^2 = 100\pi\text{ cm}^2$.

  Son volume est $\frac{20 \times 100\pi}{3} = \frac{2000}{3}\pi\text{ cm}^3$.
- une demi-boule de rayon 10cm et de volume $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 10^3 = \frac{2000}{3}\pi\text{ cm}^3$.

Le volume total est donc $\frac{2000}{3}\pi + \frac{2000}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{4000}{3}\pi\text{ cm}^3}$ soit **environ 4189 cm^3**.

2. Comme les volumes du cône et de la demi-sphère sont égaux alors le sable occupera **la moitié du culbuto**.

Exercice 4

1. Le volume du cube d'arête 10 cm vaut $10 \times 10 \times 10 =$ **1000 cm^3**.

2. Le volume de la balle sphérique de 5cm de rayon vaut $\frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \boldsymbol{\frac{500}{3}\pi\text{ cm}^3}$.

3. Le volume d'eau restant dans le cube vaut $1000 - \frac{500}{3}\pi \approx \mathbf{476\text{ cm}^3}$.

4. L'eau restante a la forme d'un prisme de base $10 \times 10 = 100\text{ cm}^2$ et de hauteur h telle que $100 \times h = 1000 - \frac{500}{3}\pi$.

La hauteur de l'eau vaut donc $10 - \frac{5}{3}\pi \approx \mathbf{4{,}8\text{ cm}}$.

Exercice 5

1. L'objet est composé de :

- un pavé droit de dimensions 4, 10 et 10 cm. Son volume vaut $4\times10\times10 = \mathbf{400cm^3}$.
- moins une demi-boule de rayon $\frac{8}{2}=4$ cm et de volume $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times4^3=\mathbf{\frac{128}{3}\pi\,cm^3}$

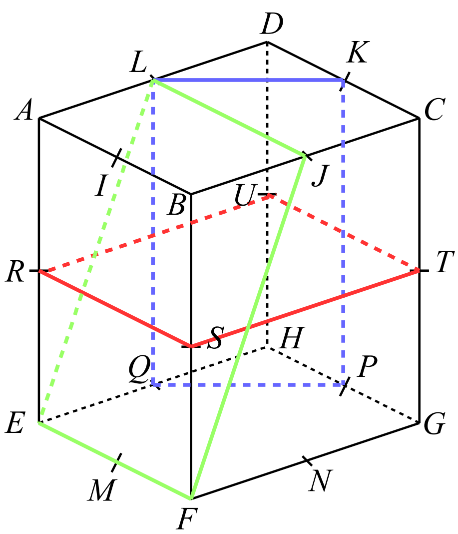
Le volume de l'objet vaut donc $400-\frac{128}{3}\pi\approx\mathbf{265{,}959\,cm^3}$.

2. La surface du gâteau est composée de :

- un disque de rayon 4 cm et d'aire $\pi\times4^2 = 16\pi$ cm².
- une demi-boule de rayon 4cm et d'aire $\frac{1}{2}\times4\pi\times4^2=32\pi$ cm².

La surface à napper de chocolat a une aire valant $16\pi + 32\pi = 48\pi$ cm² soit **environ 150,80 cm²**.

Exercice 6



Exercice 7

1. Comme A et B appartiennent au cercle de centre O alors AOB, en plus d'être **rectangle**, est **isocèle** en O.

2. $ABB'A'$ est un **rectangle**.

3. Comme AOB est rectangle en O alors $AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 3^2 + 3^2$

$AB^2 = 18$

d'où $AB=3\sqrt{2}$ cm

Comme $ABB'A'$ est un rectangle de dimensions 5 et $3\sqrt{2}$ cm alors son aire vaut $5\times3\sqrt{2}=15\sqrt{2}$ cm² soit **environ 21,21cm²**.

Exercice 8

1. Le cône (C') est une **réduction** de (C) avec le rapport $\frac{SA'}{SA}=\mathbf{\frac{5}{8}}$.

2. Le rapport des volumes des deux cônes vaut $\left(\frac{5}{8}\right)^3=\mathbf{\frac{125}{512}}$.

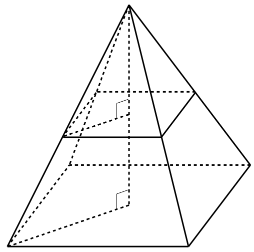
Exercice 9

1. Chacune des six faces du cube a pour aire 5×5 = 25 cm². L'aire de sa surface totale vaut donc 6×25 = **150 cm²**.

2. Le volume du cube vaut 5×5×5 = **125 cm³**.

3. Comme le rapport de surface entre les deux cubes vaut 16 = 4² alors le grand cube est un agrandissement du petit de rapport 4. Par conséquent, le volume du grand cube vaut 4^3 = 64 fois celui du petit, soit 64×125 = 8000 cm³ ou encore **8L**.

Exercice 10



1. et **4.** Voir ci-contre.

2. La base de la pyramide est un carré de 2,4cm de côté dont l'aire vaut 2,4×2,4 = **5,76 cm²**.

3. La pyramide de hauteur 4 cm et de base d'aire 5,76 cm² a pour volume $\frac{1}{3}\times 4\times 5{,}76=\mathbf{7{,}68\ cm^3}$.

5. La petite pyramide est une réduction de la grande de rapport $\frac{3}{4}$.

On en déduit que l'aire de sa base vaut $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ fois l'aire de la base de la grande, soit $\frac{9}{16}\times 5{,}76=\mathbf{3{,}24\ cm^2}$.

6. Le volume de la petite pyramide vaut $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$ fois le volume de la grande, soit $\frac{27}{64}\times 7{,}68=\mathbf{3{,}24\ cm^3}$.

Exercice 11

1. Les figures sont **a**, **c** et **d**.

2. Les figures sont **a**, **e** et **f**.

3. Les figures sont **a**, **c** et **d**.

Exercice 12

Comme $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DAC}$ sont deux angles inscrits dans le même cercle, qui interceptent le même arc alors ils ont la même mesure. D'où $\boldsymbol{\widehat{DBC}=39°}$.

Exercice 13

Comme $\widehat{ROU}$ est un angle au centre de (C) qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{RSU}$ alors $\widehat{ROU}=2\times\widehat{RSU}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{ROU}=104°}$.

Exercice 14

Comme $\widehat{BOA}$ est un angle au centre de (C) interceptant le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BEA}$ alors $\widehat{BOA}=2\times 45$ d'où $\boldsymbol{\widehat{BOA}=90°}$. Comme A et B appartiennent au cercle de centre O alors **OA = OB**.

Comme $\widehat{BOA}=90°$ et OA = OB alors **OAB est un triangle rectangle et isocèle en O**.

Exercice 15

Comme $\widehat{BOA}$ est un angle au centre interceptant le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BCA}$ alors $\widehat{BCA}=\dfrac{\widehat{BOA}}{2}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{BCA}=25°}$.

Comme $\widehat{BOC}$ est un angle au centre interceptant le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ alors $\widehat{BAC}=\dfrac{\widehat{BOC}}{2}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{BAC}=75°}$.

Comme la somme des mesures des angles du triangle ABC vaut 180° alors $\widehat{ABC}=180-75-25$ soit $\boldsymbol{\widehat{ABC}=80°}$.

Exercice 16

1. Comme $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ alors on a $\widehat{ACB}=\dfrac{\widehat{AOB}}{2}$ donc $\widehat{ACB}$ mesure $\dfrac{70}{2}=\mathbf{35°}$.

2. Comme A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ alors ***ABC* est un triangle rectangle en *A***.

3. Dans le triangle ABC rectangle en A on a $\sin(\widehat{ACB})=\dfrac{AB}{BC}$ donc $\sin(35°)=\dfrac{AB}{2\times4}$ d'où $AB = 8\sin(35°)$ soit $\boldsymbol{AB\approx 4{,}6}$ **cm**.

4. Comme D appartient au cercle de diamètre $[BC]$ alors DBC est un triangle rectangle en D.
On a alors $\cos(\widehat{CBD})=\dfrac{BD}{BC}$ donc $\cos(\widehat{CBD})=\dfrac{3}{8}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{CBD}\approx 68°}$.

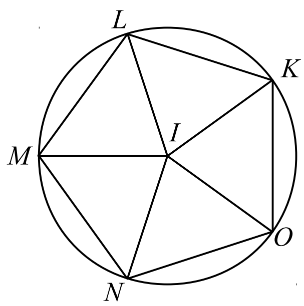
5. Comme $\widehat{COD}$ est un angle au centre interceptant le même arc que l'angle inscrit $\widehat{CBD}$ alors $\widehat{COD}=2\times\widehat{CBD}$ d'où $\boldsymbol{\widehat{COD}\approx 136°}$.
(Remarque : on n'obtient pas cette valeur en multipliant 68 par 2 car il ne faut jamais faire de calcul avec des valeurs approchées. On doit multiplier par 2 le résultat que donna la calculatrice à la fin de la question **4.**)

Exercice 17

On commence par tracer le cercle de centre I et de rayon IM.

Chaque angle au centre d'un pentagone régulier mesure $\dfrac{360}{5}=72°$.
Cela permet de construire le point L.

Comme les côtés du pentagone régulier sont de longueur égale alors on reporte au compas la longueur ML à partir de L pour trouver K, puis O, et enfin N.

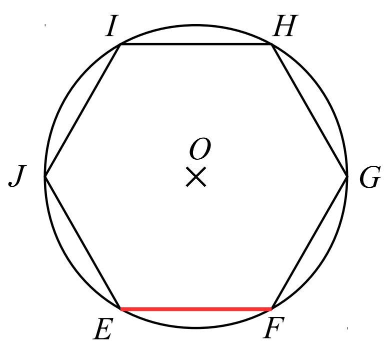


Exercice 18

Chaque angle de l'hexagone mesure $180-\dfrac{360}{6}=120°$.

Comme les côtés de l'hexagone sont de même longueur, on peut dès lors construire G et J.

On répète ce procédé pour construire le reste de l'hexagone.



Exercice 19

1. Comme $\widehat{OKA}$ est un angle d'un pentagone régulier alors il mesure $180-\frac{360}{5}=\mathbf{108°}$.

2. Comme chaque angle au centre d'un pentagone régulier mesure $\frac{360}{5}=72°$ alors on a $\widehat{PZA}=72°$.

Comme $\widehat{POA}$ est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{PZA}$ alors $\widehat{POA}=\frac{\widehat{PZA}}{2}$ donc $\widehat{POA}$ mesure $\frac{72}{2}=\mathbf{36°}$.

Exercice 20

1. Comme $\widehat{EFG}$ est un angle d'un décagone régulier alors il mesure $180-\frac{360}{10}=\mathbf{144°}$.

2. Comme $\widehat{GOJ}$ est composé de trois angles au centre du décagone alors il mesure $3\times\frac{360}{10}=108°$.

Comme $\widehat{GCJ}$ est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{GOJ}$ alors on a $\widehat{GCJ}=\frac{\widehat{GOJ}}{2}$ donc $\widehat{GCJ}$ mesure $\frac{108}{2}=\mathbf{54°}$.

3. Comme $\widehat{EOC}$ est composé de deux angles au centre du décagone alors il mesure $2\times\frac{360}{10}=72°$.

Comme $\widehat{EJC}$ est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{EOC}$ alors on a $\widehat{EJC}=\frac{\widehat{EOC}}{2}$ donc $\widehat{EJC}$ mesure $\frac{72}{2}=\mathbf{36°}$.