Exercices de 3ème – Chapitre 3 – Théorème de Thalès

Énoncés

Exercice 1

Sur une planète lointaine, les hommes (au sens "masculin") portent tous une cagoule.

1. Écrire sous forme d'implication la loi qui est à l'origine de cette situation.

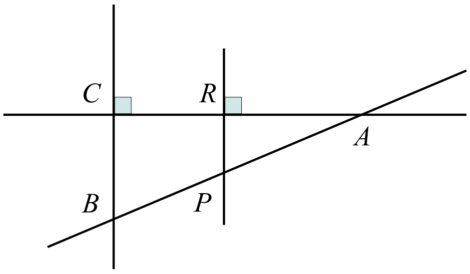
2. **a]** Écrire la contraposée de la loi. Est-elle vraie ? Par quoi cela se traduit-il dans la réalité ?
b] Écrire la réciproque de la loi. Est-elle vraie ? Par quoi cela se traduit-il dans la réalité ?

3. **a]** Écrire la réciproque de la contraposée de la loi.
b] Écrire la contraposée de la réciproque de la loi.
c] Peut-on dire que la réciproque d'une contraposée est la contraposée de la réciproque ?

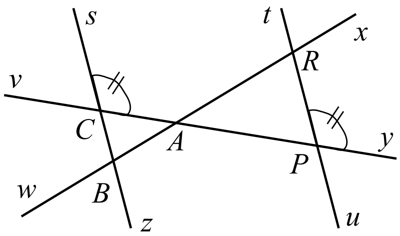
Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, démontrer qu'on est dans une configuration de Thalès et écrire les rapports égaux.

a]



b]



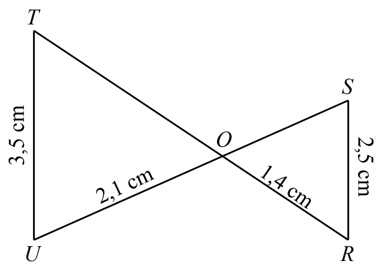
Exercice 3

Soit EFG un triangle tel que $EF = 5$ cm ; $EG = 4$ cm et $FG = 3{,}3$ cm. On appelle M le point de $[EG)$ tel que $EM = 6$ cm.
Tracer la parallèle à (FG) passant par le point M. Elle coupe $[EF)$ en N.

1. Construire la figure.
2. Calculer EN et MN.

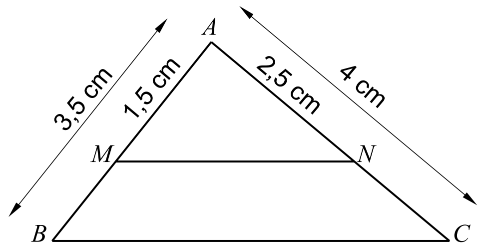
Exercice 4

Les droites (RT) et (US) sont sécantes au point O.
(RS) et (UT) sont deux droites parallèles.
Calculer OT et OS.



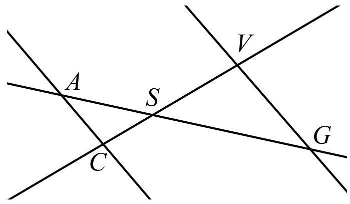
Exercice 5

On considère le dessin ci-contre.
Déterminer si (MN) et (BC) sont parallèles.



Exercice 6

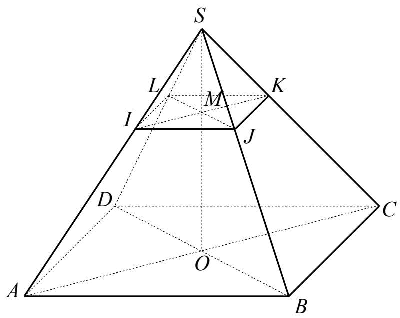
Sur le dessin ci-contre, on a :
$SV = 0{,}6$ cm ; $SG = 0{,}9$ cm ; $SA = 2{,}1$ cm et $SC = 1$ cm.
Déterminer si les droites (GV) et (CA) sont parallèles.



Exercice 7

SABCD et *SIJKL* sont deux pyramides régulières à base carrée et de sommet *S*.
[*SM*] et [*SO*] sont les hauteurs respectives de *SIJKL* et *SABCD*.
On a $SM = 1{,}5$ cm ; $SO = 4{,}5$ cm et $DB = 5$ cm.

1. Que peut-on dire de (MJ) et (OB) ? Pourquoi ?
2. Calculer la valeur exacte de MJ.

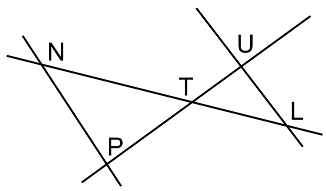


Exercice 8

Compléter les phrases suivantes :

a] Si $\frac{GN}{GU} = \frac{GP}{GL}$ et si les points .... d'une part et les points .... d'autre part sont alignés dans .... alors les droites (.......) et (.......) sont ....

b] En considérant le dessin ci-contre, si $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{TN}$ et si les points .... d'une part et les points .... d'autre part sont .... alors ......



Exercice 9

a] Construire le triangle *RST* tel que $RS = 6$ cm ; $ST = 9$ cm et $RT = 8$ cm.
Placer le point *P* sur [*RS*] tel que $SP = 4$ cm et le point *M* sur [*ST*] tel que $TM = 3$ cm.
Démontrer que les droites (MP) et (RT) sont parallèles.

b] Construire le triangle *VOU* tel que $OV = 2{,}5$ cm ; $OU = 3{,}5$ cm et $VU = 5$ cm.
Placer sur [*VO*) le point *T* tel que $VT = 5{,}5$ cm et sur [*UO*) le point *E* tel que $UE = 7{,}7$ cm.
Démontrer que les droites (UV) et (ET) sont parallèles.

Exercice 10

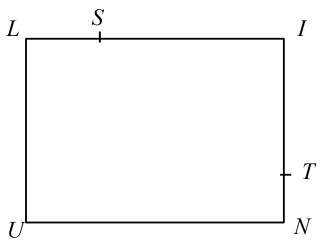
Tracer un segment [*EF*] de 10 cm de longueur puis un demi-cercle de diamètre [*EF*].
Placer le point *G* sur ce demi-cercle, tel que $EG = 9$ cm.
Placer le point *M* sur le segment [*EG*] tel que $EM = 5{,}4$ cm et le point *P* sur le segment [*EF*] tel que $EP = 6$ cm.

Démontrer que le triangle *EMP* est rectangle en *M*.

Exercice 11

LINU est un rectangle. Le point *S* appartient à [*LI*] et le point *T* à [*IN*].

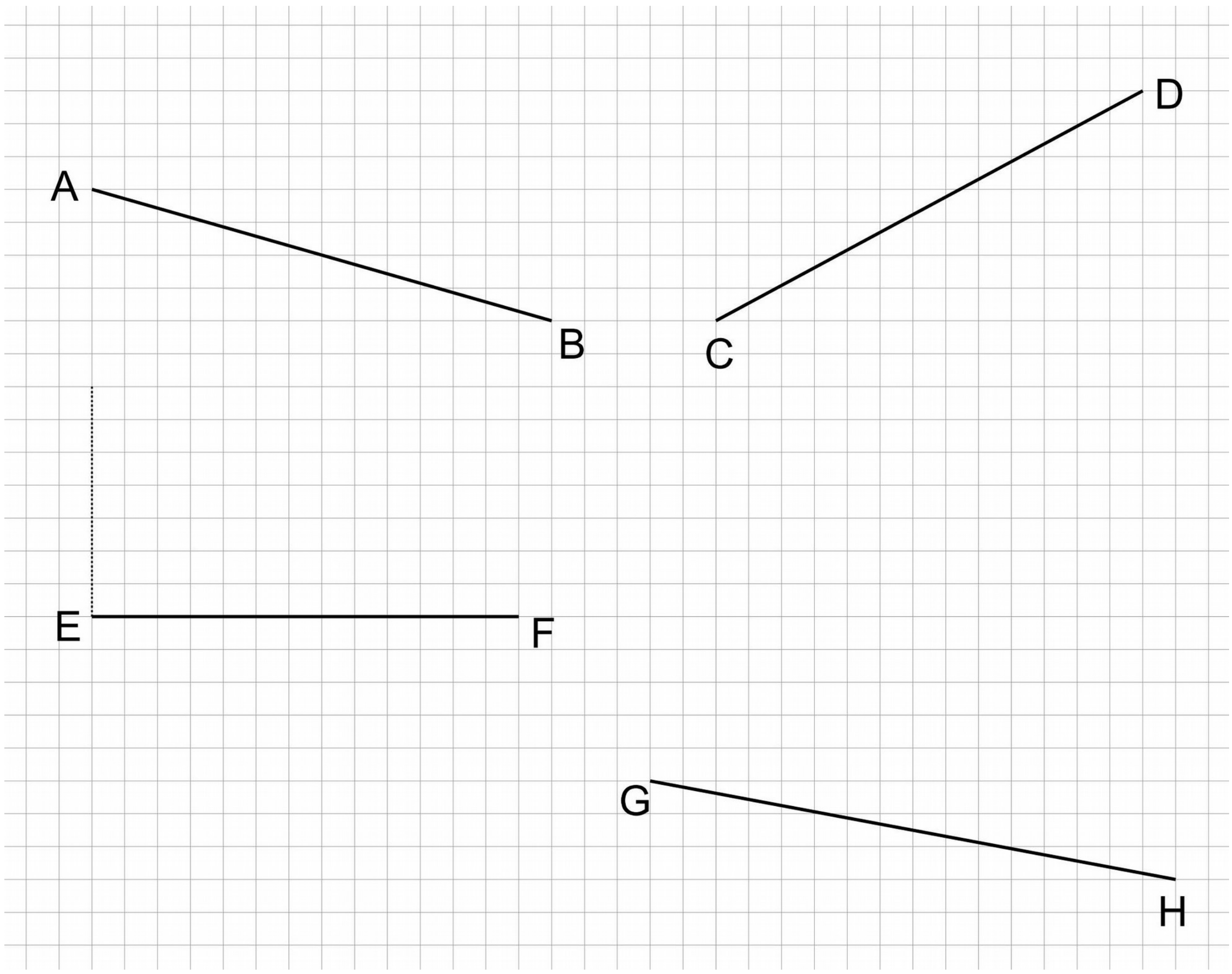
$LI = 24$ dm ; $LU = 18$ dm ; $LS = 4$ dm et $TN = \dfrac{LU}{6}$ dm.



1. Démontrer que $LN = 30$ dm.
2. Déterminer les longueurs *IS* et *IT*.
3. Démontrer que (*ST*) et (*LN*) sont parallèles.

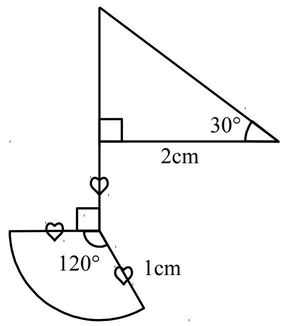
Exercice 12

À l'aide d'une règle non graduée et sans faire aucun calcul, scinder les segments ci-dessous en sept parts égales.
Laisser les traits de construction afin de rendre le raisonnement explicite.



Exercice 13

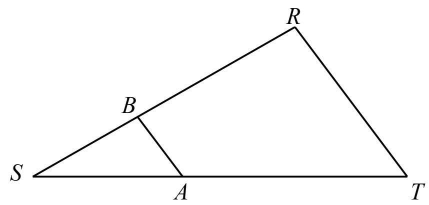
Construire un agrandissement de rapport $\dfrac{3}{2}$ du dessin ci-contre.



Exercice 14

Le triangle SBA est une réduction du triangle SRT.
On a $ST = 4$ cm ; $SB = 3$ cm ; $AB = 2$ cm et $RT = 5$ cm.

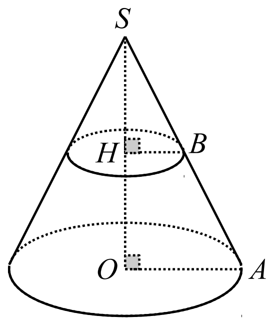
1. Quel est le rapport de réduction ?
2. Calculer les longueurs SA et SR.
3. Montrer que $\widehat{BAS} = \widehat{RTS}$.



Exercice 15

Le cône (C_1) a pour sommet S et pour base le disque de centre H et de rayon [HB].
Le cône (C_2) a pour sommet S et pour base le disque de centre O et de rayon [OA].
On a $SH = 2$ cm et $SO = 6$ cm.
Le cône (C_1) est une réduction du cône (C_2).

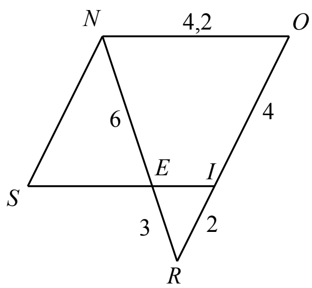
1. Calculer le rapport de réduction.
2. En déduire le rayon de la base du cône (C_2) sachant que $HB = 1{,}5$ cm.
3. Calculer la longueur d'une génératrice du cône (C_2).
4. En déduire la longueur d'une génératrice du cône (C_1).



Exercice 16

Sur la figure ci-contre, on a (NS) parallèle à (RO).

1. Montrer que (IE) est parallèle à (NO).
2. Calculer SI.
3. Calculer SE.

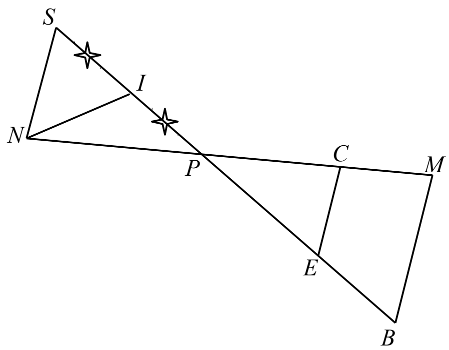


Exercice 17

Sur la figure suivante :

- les droites (MB) et (NS) sont parallèles.
- $PM = 12$cm ; $MB = 6{,}4$cm ; $PB = 13{,}6$cm ; $PN = 9$cm ; $PE = 3{,}4$cm ; $PC = 3$cm.
- I est le milieu de [SP].

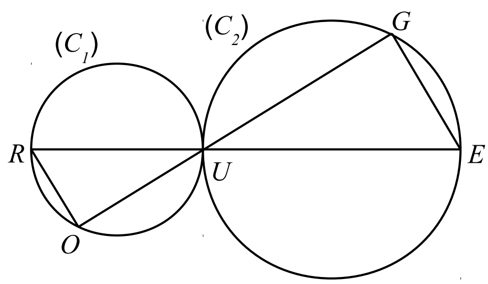
1. Calculer NS.
2. Les droites (CE) et (MB) sont-elles parallèles ?
3. Démontrer que le triangle PBM est rectangle.
4. Un autre triangle est rectangle. Lequel ? Justifier.
5. Calculer PS puis NI.



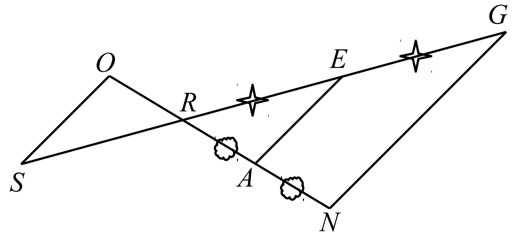
Exercice 18

Les cercles (C_1) et (C_2) ont pour diamètres respectifs [RU] et [UE].
On a $RU = 2$cm ; $UE = 3$cm et $UG = 2{,}4$cm.

1. Quelle est la nature des triangles ROU et UGE ? Justifier les réponses.
2. ROU est une réduction de UGE. Quel est le coefficient de réduction ?
3. Calculer GE.
4. Déterminer les valeurs exactes de UO et de RO.



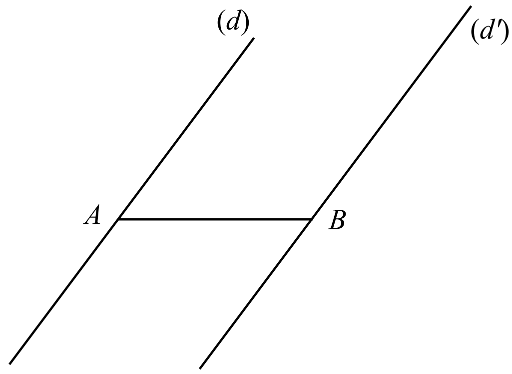
Exercice 19



On considère la figure ci-contre, sachant que :
$GN = 5\text{cm}$; $OS = 3{,}2\text{cm}$; $RE = 5\text{cm}$; $\widehat{REA} = 36°$ et $\widehat{RSO} = 36°$.

1. Montrer que les droites (GN) et (EA) sont parallèles.
2. Montrer que les droites (EA) et (OS) sont parallèles.
3. Calculer EA.
4. Calculer SR.

Exercice 20



Sur le dessin ci-contre, les droites (d) et (d') sont parallèles.

1. Sur la droite (d), placer deux points M_1 et M_2 de part et d'autre de A tel que $AM_1 = AM_2 = 2$ cm. Sur la droite (d') placer un point N tel que $BN = 3$ cm.

2. Soit M le point d'intersection de (AB) et (M_1N).
Déterminer la valeur exacte de $\dfrac{MA}{MB}$.

3. Soit M' le point d'intersection de (AB) et (M_2N).
Déterminer la valeur exacte de $\dfrac{AM'}{BM'}$.

4. En utilisant la même méthode, construire les points M de la droite (CD) tels que $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{3}{4}$.

Corrigés

Exercice 1

1. La loi est : "Si on est un homme, alors on porte une cagoule".

2. **a]** Contraposée de la loi : "Si on ne porte pas de cagoule, alors on n'est pas un homme".
La contraposée a le même statut que l'implication initiale : elle est aussi vraie que la loi.
Cela se traduit par le fait que les seules personnes que l'on croise sans cagoule sont des femmes.
b] Réciproque de la loi : "Si on porte une cagoule, alors on est un homme".
Cette phrase est fausse : on peut croiser des femmes cagoulées.

3. **a]** La réciproque de la contraposée de la loi est : "Si on n'est pas un homme, alors on ne porte pas de cagoule".
b] La contraposée de la réciproque de la loi est : "Si on n'est pas un homme, alors on ne porte pas de cagoule".
c] Oui, la réciproque d'une contraposée est la contraposée de la réciproque.

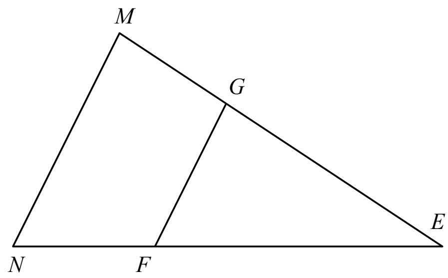
Exercice 2

a] Comme (*BC*) et (*PR*) sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (*AC*) alors (*BC*) est parallèle à (*PR*).
Comme les parallèles (*BC*) et (*PR*) coupent les droites (*CR*) et (*BP*) sécantes en *A* alors on est dans une configuration de Thalès.
Par conséquent on a $\frac{AC}{AR}=\frac{AB}{AP}=\frac{BC}{PR}$.

b] Comme les angles correspondants $\widehat{sCA}$ et $\widehat{RPy}$ sont égaux alors $(BC)\|(RP)$.
Comme les parallèles (*BC*) et (*PR*) coupent les droites (*CP*) et (*BR*) sécantes en *A* alors on est dans une configuration de Thalès.
Par conséquent on a $\frac{AC}{AP}=\frac{AB}{AR}=\frac{BC}{PR}$.

Exercice 3

1. Voir ci-contre.



2. Comme les parallèles (*GF*) et (*MN*) coupent les droites (*GM*) et (*NF*) sécantes en *E*, alors on est dans une configuration de Thalès.
Par conséquent on a $\frac{EM}{EG}=\frac{EN}{EF}=\frac{MN}{GF}$ donc $\frac{6}{4}=\frac{EN}{5}=\frac{MN}{3{,}3}$

On a $\frac{6}{4}=\frac{EN}{5}$ donc $EN=\frac{6\times 5}{4}$. D'où ***EN* = 7,5 cm.**
On a $\frac{6}{4}=\frac{MN}{3{,}3}$ donc $MN=\frac{6\times 3{,}3}{4}$. D'où ***MN* = 4,95 cm.**

Exercice 4

Comme les parallèles (*TU*) et (*RS*) coupent les droites (*TR*) et (*US*) sécantes en *O*, alors on est dans une configuration de Thalès.
Par conséquent on a $\frac{OT}{RO}=\frac{OU}{OS}=\frac{TU}{RS}$ donc $\frac{OT}{1{,}4}=\frac{2{,}1}{OS}=\frac{3{,}5}{2{,}5}$.

On a $\frac{OT}{1{,}4}=\frac{3{,}5}{2{,}5}$ donc $OT=\frac{1{,}4\times 3{,}5}{2{,}5}$. D'où ***OT*=1,96 cm.**
On a $\frac{2{,}1}{OS}=\frac{3{,}5}{2{,}5}$ donc $OS=\frac{2{,}5\times 2{,}1}{3{,}5}$. D'où ***OS*=1,5 cm.**

Exercice 5

On a $\frac{AB}{AM}=\frac{3{,}5}{1{,}5}$ donc $\frac{AB}{AM}=\frac{7}{3}$. On a $\frac{AC}{AN}=\frac{4}{2{,}5}$ donc $\frac{AC}{AN}=\frac{8}{5}$.
Comme $\frac{AB}{AM}\neq\frac{AC}{AN}$ alors, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (*MN*) et (*BC*) ne sont pas parallèles.

Exercice 6

On a $\frac{SA}{SG}=\frac{2,1}{0,9}=\frac{7}{3}$ et $\frac{SC}{SV}=\frac{1}{0,6}=\frac{5}{3}$.

Comme $\frac{SA}{SG}\neq\frac{SC}{SV}$ alors, d'après le théorème de Thalès, les droites (GV) et (CA) ne sont pas parallèles.

Exercice 7

1. Comme $SABCD$ et $SIJKL$ sont des pyramides régulières de hauteurs [SM] et [SO] alors (MJ) et (OB) sont toutes deux perpendiculaires à (SO). Donc **(*MJ*) et (*OB*) sont parallèles**.

2. Comme [SO] est la hauteur d'une pyramide régulière de base carrée de sommet S alors O est le centre du carré $ABCD$, d'où $OB=\frac{DB}{2}$ donc $\boldsymbol{OB=2,5}$**cm**.

Comme les parallèles (MJ) et (OB) interceptent les droites (BJ) et (OM) sécantes en S alors on a $\frac{SM}{SO}=\frac{SJ}{SB}=\frac{MJ}{OB}$.

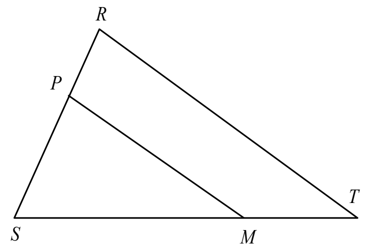
On a donc $\frac{1,5}{4,5}=\frac{MJ}{2,5}$ soit $MJ=\frac{2,5\times1,5}{4,5}$. D'où $\boldsymbol{MJ=\frac{5}{6}}$ **cm**.

Exercice 8

a] Si $\frac{GN}{GU}=\frac{GP}{GL}$ et si les points N, G, U d'une part et les points P, G, L d'autre part sont alignés dans cet ordre alors les droites (NP) et (UL) sont parallèles.

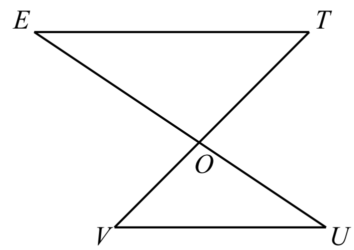
b] Si $\frac{TU}{TP}=\frac{TL}{TN}$ et si les points L, T, N d'une part et les points U, T, P d'autre part sont alignés dans cet ordre alors les droites (NP) et (UL) sont parallèles.

Exercice 9



a] On a $\frac{SP}{SR}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ et $\frac{SM}{ST}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Comme $\frac{SP}{SR}=\frac{SM}{ST}$ avec S, P, R d'une part et S, M, T d'autre part, alignés dans cet ordre, alors **(*MP*) et (*RT*) sont parallèles**.

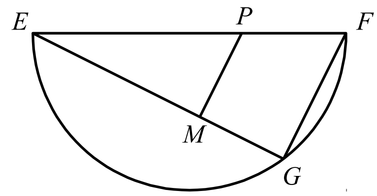


b] On a OE = 7,7 – 3,5 donc OE = 4,2cm.
On a OT = 5,5 – 2,5 donc OT = 3cm.

On a $\frac{OU}{OE}=\frac{3,5}{4,2}=\frac{5}{6}$ et $\frac{OV}{OT}=\frac{2,5}{3}=\frac{5}{6}$.

Comme $\frac{OU}{OE}=\frac{OV}{OT}$ avec V, O, T d'une part et U, O, E d'autre part, alignés dans cet ordre, alors **(*UV*) et (*ET*) sont parallèles**.

Exercice 10



- On a $\dfrac{EP}{EF}=\dfrac{6}{10}=0{,}6$ et $\dfrac{EM}{EG}=\dfrac{5{,}4}{9}=0{,}6$.

Comme $\dfrac{EP}{EF}=\dfrac{EM}{EG}$ avec *E*, *P*, *F* d'une part et *E*, *M*, *G* d'autre part, alignés dans cet ordre, alors (*PM*) et (*FG*) sont parallèles.

- Comme *G* appartient au cercle de diamètre [*EF*] alors *EGF* est rectangle en *G*.

Comme les droites (*PM*) et (*FG*) sont parallèles et que (*EG*) est perpendiculaire à (*FG*) alors (*EM*) est perpendiculaire à (*PM*).

- On en déduit que le triangle *EMP* est rectangle en *M*.

Exercice 11

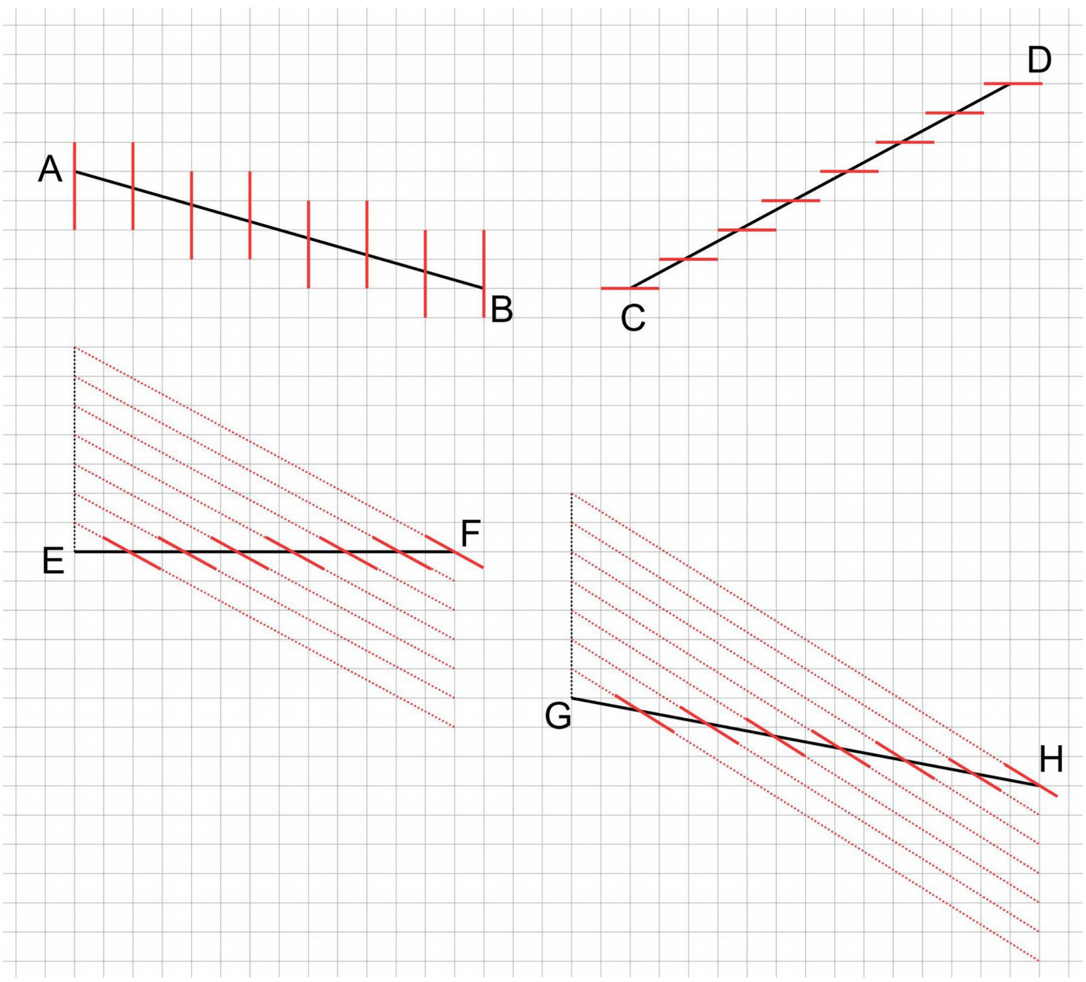
1. Comme le triangle *LIN* est rectangle en I alors $NL^2=LI^2+NI^2$.
Donc $NL^2=576+324$ d'où ***LN* = 30dm**.

2. On a *IS* = *LI* – *LS* donc *IS* = 24 – 4 soit ***IS* = 20 dm**.
On a *IT* = *IN* – *TN* donc *IT* = 18 – 18/6 soit ***IT* = 15 dm**.

3. On a $\dfrac{IS}{IL}=\dfrac{20}{24}=\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{TI}{NI}=\dfrac{15}{18}=\dfrac{5}{6}$.

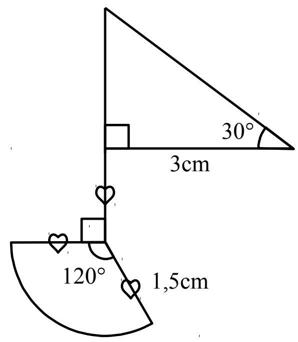
Comme $\dfrac{IS}{IL}=\dfrac{TI}{NI}$ avec *I*, *S*, *L* d'une part et *I*, *T*, *N* d'autre part, alignés dans cet ordre, alors (*ST*) et (*LN*) sont parallèles.

Exercice 12



Exercice 13

Lors d'un agrandissement, les longueurs sont multipliées mais pas les angles.



Exercice 14

1. Le rapport de réduction est $\frac{AB}{RT}=\frac{2}{5}$ soit **0,4**.

2. Comme SA est la réduction de ST alors $SA=0{,}4\times ST$ soit **SA = 1,6 cm**.
Comme SB est la réduction de SR alors $SB=0{,}4\times SR$ donc $SR=\frac{SB}{0{,}4}$ soit **SR = 7,5 cm**.

3. Comme le triangle SBA est une réduction du triangle SRT et que les réductions conservent les angles, alors $\widehat{BAS}=\widehat{RTS}$.

Exercice 15

1. Comme (C_1) est une réduction du cône (C_2) alors [SH] est la réduction de [SO] et le rapport est $\frac{SH}{SO}=\frac{2}{6}$ soit $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

2. Comme (C_1) est une réduction du cône (C_2) alors [HB] est la réduction de [OA] et on a $\frac{HB}{OA}=\frac{1}{3}$ d'où $OA=3\times HB$ donc le rayon de la base de (C_2) vaut $3\times 1{,}5$ =**4,5 cm**.

3. Dans le triangle SOA rectangle en O, on a : $SA^2=SO^2+AO^2$
$SA^2=6^2+4{,}5^2$
$SA^2=36+20{,}25$
$SA^2=56{,}25$ d'où SA=7,5cm.

La longueur d'une génératrice de (C_2) est **7,5 cm**.

4. Comme (C_1) est une réduction du cône (C_2) alors [SB] est la réduction de [SA] et $SB=\frac{1}{3}\times SA$ d'où SB=2,5cm.

La longueur d'une génératrice de (C_1) est **2,5 cm**.

Exercice 16

1. On a $\frac{ER}{RN}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ et $\frac{RI}{RO}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Comme $\frac{ER}{RN}=\frac{RI}{RO}$ avec R, E, N d'une part et R, I, O d'autre part, alignés dans cet ordre, alors **(*IE*) et (*NO*) sont parallèles**.

2. On sait que (NS) est parallèle à (RO) et on a montré que (SI) est parallèle à (NO).
Comme le quadrilatère $NOIS$ a ses côtés deux à deux parallèles alors c'est un parallélogramme.
On en déduit que SI=NO donc ***SI*=4,2 cm**.

3. Comme les parallèles (EI) et (NO) coupent les droites (NE) et (OI) sécantes en R, alors RON est un agrandissement de RIE de rapport $\frac{9}{3}=3$. On a donc $EI=\frac{NO}{3}$ donc EI=1,4cm.

Comme $SI=SE+EI$ alors on en déduit que SE=4,2 – 1,4 soit ***SE* = 2,8 cm**.

Exercice 17

1. Comme les parallèles *(MB)* et *(SN)* coupent les droites (*NM*) et *(SB)* sécantes en *P*, alors on a : $\frac{PM}{NP}=\frac{PB}{PS}=\frac{BM}{NS}$ donc $\frac{12}{9}=\frac{13,6}{PS}=\frac{6,4}{NS}$. On a donc : $NS=\frac{9\times 6,4}{12}$ donc ***NS=4,8cm***.

2. On a $\frac{PC}{PM}=\frac{3}{12}=0,25$ et $\frac{PE}{PB}=\frac{3,4}{13,6}=0,25$.
Comme $\frac{PC}{PM}=\frac{PE}{PB}$ avec *P*, *E*, *B* d'une part et *P*, *C*, *M* d'autre part, alignés dans cet ordre, alors **(C*E*) et (*MB*) sont parallèles**.

3. On a $PB^2=13,6^2$ donc $PB^2=184,96$.
D'autre part, on a $PM^2+MB^2=12^2+6,4^2$ donc $PM^2+MB^2=144+40,96$ donc $PM^2+MB^2=184,96$.
Comme $PM^2+MB^2=PB^2$ alors le triangle ***PBM* est rectangle en *M***.

4. Comme les parallèles (*MB*) et (*CE*) coupent les droites (*CM*) et (*EB*) sécantes en *P*, alors le triangle *PCE* est une réduction du triangle *PMB*. Donc le triangle ***PCE* est rectangle en *C***.

5. D'après les égalités du **1.** on a $PS=\frac{9\times 13,6}{12}$ donc ***PS*=10,2 cm**.
Comme PNS est une réduction de *PMB* alors *PNS* est rectangle en *N*.
Comme le centre du cercle circonscrit du triangle *PNS* rectangle en *N* est le milieu de son hypoténuse, alors *IN=IP=IS*.
On a donc $NI=\frac{PS}{2}$ soit ***NI*=5,1 cm**.

Exercice 18

1. Comme O et G appartiennent respectivement aux cercles de diamètres [RU] et [UE], alors les traingles ROU et UGE sont rectangles, respectivement en O et G.

2. Comme ROU est une réduction de UGE alors [RU] est la réduction de [UE].
Donc le coefficient de réduction vaut $\frac{RU}{UE}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

3. Comme UGE est rectangle en G alors $UE^2=GU^2+GE^2$ d'où $GE^2=3^2-2,4^2$ d'où ***GE*=1,8cm**.

4. Comme ROU est une réduction de UGE alors [OU] est la réduction de [UG] et [RO] est la réduction de [GE].
On a donc $OU=\frac{2}{3}\times 2,4$ et $RO=\frac{2}{3}\times 1,8$. Donc **OU=1,6cm** et **RO=1,2cm**.

Exercice 19

1. Dans le triangle RGN, comme la droite (EA) passe par les milieux des côtés [RG] et [RN] alors elle est parallèle au troisième côté. D'où **(EA) parallèle à (GN)**.

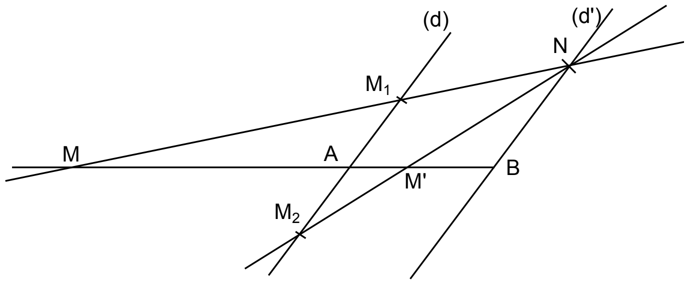
2. La droite (ES) coupe les droites (OS) et (EA). Comme les angles alternes internes $\widehat{SEA}$ et $\widehat{ESO}$ sont égaux, alors les droites **(EA) et (OS) sont parallèles**.

3. Dans le triangle RGN, comme [EA] a pour extrémités les milieux des côtés [RG] et [RN] alors $EA=\frac{GN}{2}$. D'où **EA=2,5cm**.

4. Comme les parallèles (EA) et (SO) coupent les droites (OA) et (SE) sécantes en R, alors on a : $\frac{ER}{RS}=\frac{RA}{RO}=\frac{EA}{OS}$ soit $\frac{5}{RS}=\frac{RA}{RO}=\frac{2,5}{3,2}$. Donc $RS=\frac{5\times 3,2}{2,5}$ donc **SR=6,4cm**.

Exercice 20

1. Voir ci-contre.



2. Comme les parallèles (d) et (d') coupent les droites (M_1N) et (AB) sécantes en M, alors on a : $\frac{MA}{MB}=\frac{AM_1}{BN}$ donc $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$.

3. Comme les parallèles (d) et (d') coupent les droites (M_2N) et (AB) sécantes en M', alors on a : $\frac{M'A}{M'B}=\frac{AM_2}{BN}$ donc $\frac{M'A}{M'B}=\frac{2}{3}$.

4. Pour construire les points M de la droite (CD) tels que $\frac{MC}{MD}=\frac{3}{4}$ on commence par tracer deux droites parallèles (d) et (d') passant par C et D. On place les points M_1 et M_2 sur (d) à 3cm de C et un point N sur (d') tel que DN=4cm. Les points cherchés, que l'on nomme M et M', se situent à l'intersection de (CD) avec (M_1N) et (M_2N).